ISSN 0130-2221

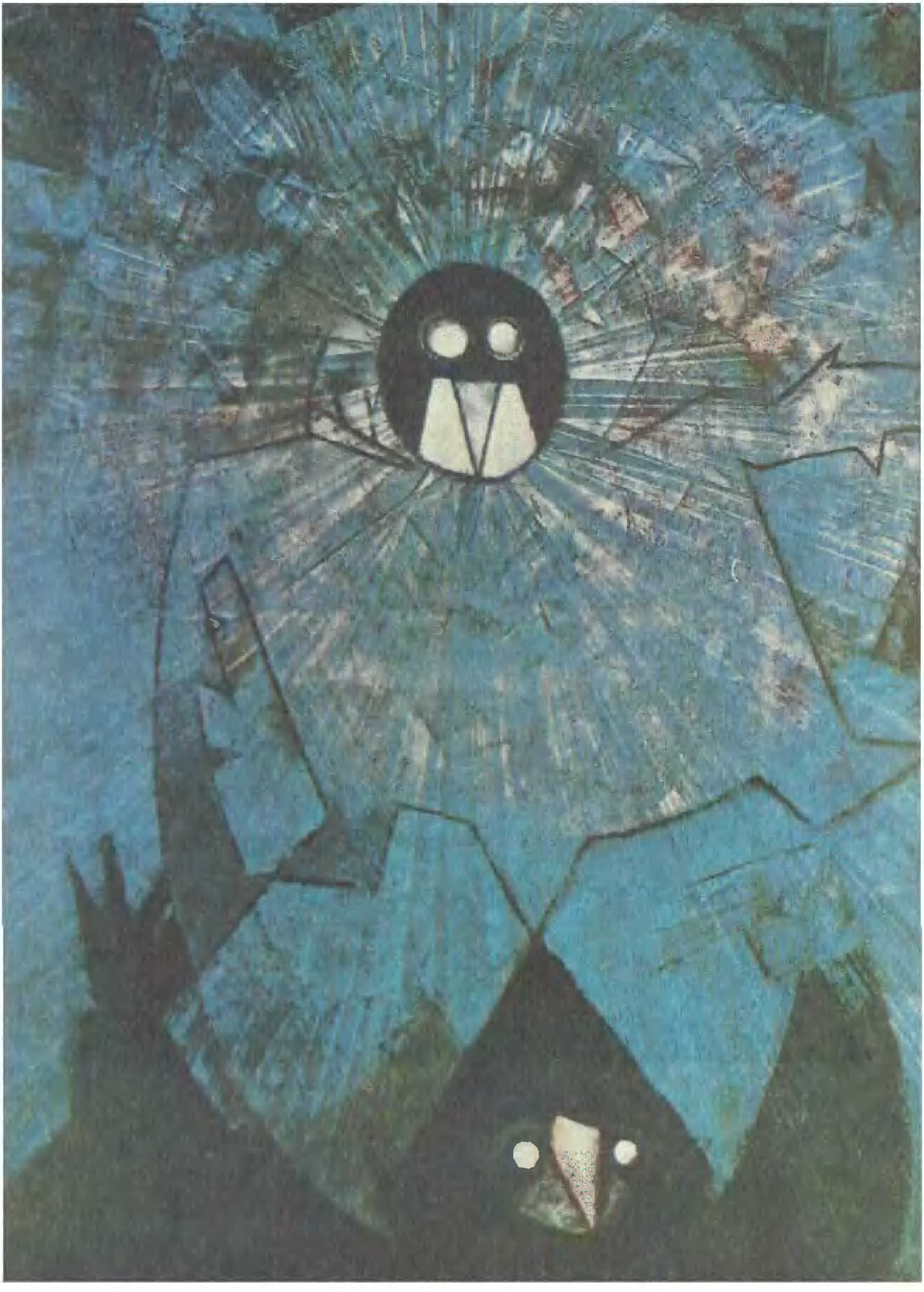
Квант

Научно-популярный
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

«Калейдоскоп» спектров

1990



Квант

2 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Памяти А. Д. Сахарова
4 *Р. Винокур.* Кинематика баскетбольного броска
10 *А. Тоом.* Дама с Собачкой
18 *М. Беркинблит, Е. Глаголева.* Математика в живых организмах
27 *Я. Смородинский.* Размышления о массе

Задачник «Кванта»
31 Задачи М1206—М1210, Ф1213—Ф1217
33 Решения задач М1181—М1185, Ф1193—Ф1197

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Фантастика
44 *С. Сайкс.* Цифертон

Игры и головоломки
50 Небольшой переполох в аптеке

«Квант» для младших школьников
51 Задачи
52 *А. Штейнберг.* Еще раз о законе Паскаля

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:
55 Уравнения, которые удается решить
57 Задачи в стиле Заочной школы

Лаборатория «Кванта»
59 *М. Цыпин.* Опыты с высокочастотным генератором

Практикум абитуриента
62 *А. Черноуцан.* Системы отсчета в задачах механики

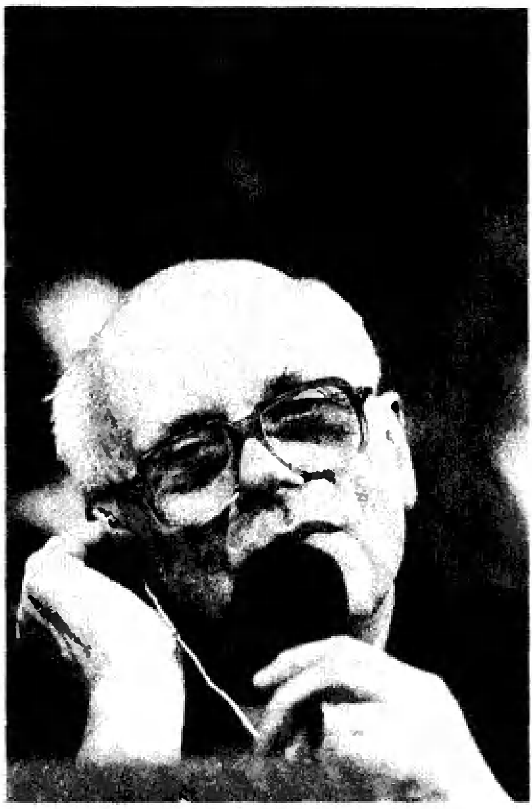
67 **Варианты вступительных экзаменов**

Информация
71 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
72 Прием на экспериментальное отделение ВЗМШ «Языки и литература»

74 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут *(9, 17, 30, 43)*
Реклама *(66)*

Наша обложка
1 *Темные (фраунгоферовы) линии на фоне разноцветной радуги — это линии, образующие спектр поглощения (см. «Калейдоскоп «Кванта»).*

2 *Репродукция картины Макса Эрнста (1891—1976) «Gli dei oscuri» (1957). «Зрительные рецепторы, так же, как и другие... получают сигналы из внешнего мира...» (из статьи «Математика в живых организмах»).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Плоский бурр».*



Памяти А. Д. Сахарова

Неожиданная смерть Андрея Дмитриевича Сахарова ошеломила... И сейчас еще трудно в полной мере представить глубину потери, которую понесли страна, мир, каждый мыслящий человек на Земле...

Когда было особенно трудно, даже короткая встреча с А. Д. снова вселяла надежду на лучшее будущее; само его существование и несгибаемое личное мужество в борьбе за истину, за справедливость, за «маленького» человека — были опорой в трудные моменты жизни.

40 лет с перерывами общаться с таким человеком — это неоценимый подарок судьбы. Его влияние на многих людей трудно осознать до конца. Я могу лишь попытаться набросать контуры того образа этой незаурядной личности, который продолжает складываться в моем сознании из множества впечатлений.

С первых встреч в 1949 году в Физическом институте АН СССР я подсознательно понял, что А. Д. Сахаров — это особо сконструированная личность. Уже в то время он пользовался большим авторитетом у ведущих ученых, занимавшихся атомной проблемой, хотя ему не было еще и 30 лет.

Излагал он свои мысли как бы с трудом, медленно, но каждая фраза была глубоко продумана. Это качество затрудняло его преподавательскую деятельность — студенты, как он говорил, плохо понимали его. Способность же А. Д. из общих качественных соображений объяснять сложные физические проблемы поражала.

Особенно сильное впечатление произвела в 1950 году статья-отчет А. Д. Сахарова и И. Е. Тамма об управляемом термоядерном синтезе. Игорь Евгеньевич рассказывал мне в этой связи: «Мы работали тогда, как будто в шорах. Все время тратили на атомную проблему. И вот однажды приходит ко мне вечером А. Д. и... излагает свою идею о том, что можно попытаться удержать плазму в замкнутом тороидальном объеме с помощью магнитного поля и, в принципе, разогреть ее до температуры термоядерной реакции». Так родилось новое направление в физике — теория и разработка магнитных термоядерных реакторов.

С 1950 по 1969 год А. Д. работает во Всесоюзном научно-исследовательском институте экспериментальной физики (ВНИИЭФ), вносит выдающийся вклад в разработку и создание ядерного оружия.

Но уже с конца 50-х годов он все глубже осознает опасность накопления ядерного оружия у противоборствующих сверхдержав — СССР и США, а также возрастающую экологическую угрозу, которую несут испытания этого оружия. Он был единственным ученым из экспертов, кто в 1961 году решительно высказался против испытаний 60-мегатонной водородной бомбы на Новой Земле. Его не послушали...

Именно тогда он впервые, по-видимому, понял, что угроза ядерного конфликта неизмеримо возрастает при наличии неподконтрольной власти отдельной личности или узкой группы лиц, стоящих во главе государства. Это было начало нового мышления.

Переломным в жизни А. Д. Сахарова стал 1968 год, когда он, как провозвестник новой эры, в своем меморандуме «Размышления о прогрессе, мирном сосуществовании и интеллектуальной свободе» привлек внимание к трем главным проблемам, стоящим перед человечеством: экологической, ядерной и проблеме авторитарной власти. Статья ходила по рукам. Ее не позволили опубликовать в открытой печати. После этого А. Д. вынужден уйти из ВНИИЭФа. Он вернулся в ФИАН на должность старшего научного сотрудника.

Не буду описывать все перипетии и коллизии его общественной и научной деятельности с 1969 по январь 1980 года, когда его без суда и следствия высылают в Горький и лишают всех правительственных наград. Именно в эти годы в полной мере проявились основные черты его личности — последовательного и бескомпромиссного защитника инакомыслящих, борца за коренные изменения в сторону демократизации и полной перестройки всей нашей политической, экономической и социальной системы. Воистину он был предтечей перестройки в нашей стране.

Трудно вообразить, какому давлению подвергались он и те, кто его поддерживал. Доставалось руководству и сотрудникам Отдела теоретической физики им. И. Е. Тамма ФИАНа, где он работал. Но никто из них не подписал порочащих А. Д. заявлений.

Все эти годы А. Д. Сахаров продолжал заниматься наукой. Получила развитие его опубликованная еще в 1967 году работа о нестабильности протона. Сейчас во всем мире проводятся эксперименты по обнаружению этого уникального явления. Большой интерес А. Д. проявлял к вопросам космологии и квантовой гравитации, где в последнее десятилетие вскрыта глубокая взаимосвязь между процессами, происходящими на ранней стадии развития Вселенной, и кварк-лептонной структурой элементарных частиц.

В период с 1979 по 1988 год А. Д. написал восемь статей, среди которых — работы по барионной асимметрии Вселенной (1979, 1988; по этому вопросу А. Д. сделал обзорный доклад на Международной конференции в Ленинграде, посвященной 100-летнему юбилею А. А. Фридмана), «Космологические модели Вселенной с поворотом стрелы времени» (1980), «Многомерные модели Вселенной» (1982). Эти работы свидетельствуют о силе его духа, преданности науке, о неослабевающем интересе к принципиальным вопросам современной физики.

Еще один штрих — об ответственности. После возвращения 23 декабря 1986 года из ссылки, А. Д. готовил доклад к международному форуму «За безъядерный мир, за выживание человечества». Я спросил его, когда можно будет познакомиться с этим докладом. Он ответил, что подготовка текста идет с трудом: «Приходится биться над каждой фразой, боюсь нанести ущерб нашей стране».

Время все ставит на свои места. А. Д. поверил в перестройку и принял ее. Он говорил, что верит в искреннее стремление М. С. Горбачева демонтировать нашу командно-административную систему. Но он был решительно против дальнейшей затяжки с принятием основных законов о земле, о собственности, о власти, с обсуждением 6 статьи Конституции. Его радовали перемены и особенно появление на политической арене прогрессивных молодых и талантливых политиков-депутатов.

Он был против любого насилия над личностью. Его терпимость и милосердие поражали окружающих. Он очень любил жизнь и верил, что человечество станет добрее.

Доктор физико-математических наук
В. Файнберг

КИНЕМАТИКА БАСКЕТБОЛЬНОГО БРОСКА

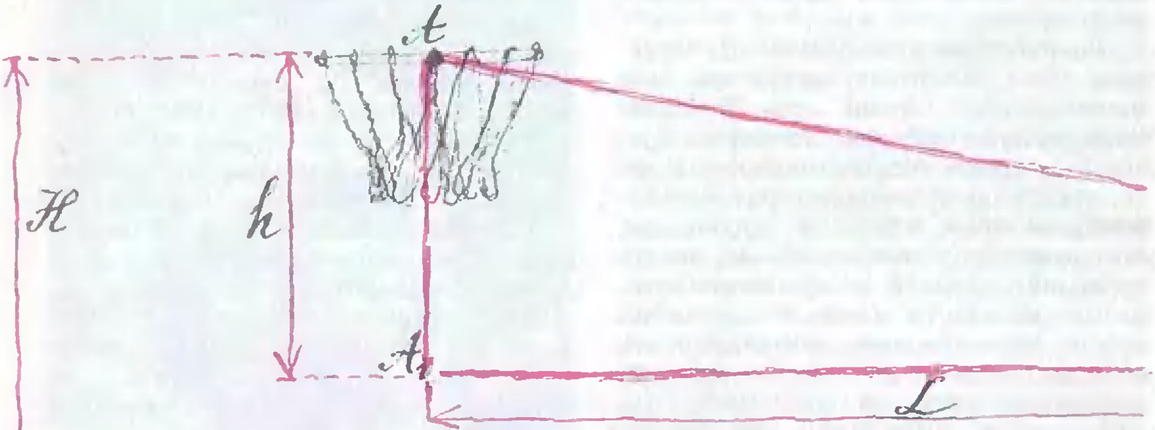


Рис. 1.

Кандидат технических наук Р. ВИНОКУР

Это произошло в конце прошлого столетия в американском городе Спрингфилде в штате Массачусетс. Студенты местного колледжа очень любили играть в бейсбол и футбол. Однако из-за плохой погоды спортивные занятия часто переносились в тесный гимнастический зал. Чтобы его питомцы не скучали, преподаватель физического воспитания Джеймс Нейсмит в 1891 году придумал игру, для которой не надо большой площадки, и назвал ее «баскетбол» — от английских слов «баскет» — корзина и «бол» — мяч. Это название очень емко передает сущность игры, поскольку, как часто ни корректировались правила баскетбола за его последующую историю, всегда главным элементом игры оставался бросок мяча в корзину: сначала в натуральную (из-под персиков), а потом — в металлическое кольцо с подвешенной к нему сеткой без дна.

На родине баскетбола, в США, помимо игровых баталий, престижны и соревнования на точность выполнения различных бросков. Американец Тед Мартин забил подряд 2036 штрафных бросков (1977 г.), а его соотечественник Фред Ньюмен — «всего» 88, но... с закрытыми глазами (1978 г.). Фантастической меткостью запомнились во многих матчах югослав Дражан Пётрович и наш Сергей Белов.

Чтобы стать баскетбольным снайпером, помимо врожденных данных, необходимо много работать над техникой броска. Например, Дражан Петрович каждое утро приходил в зал только для того, чтобы 500 раз бросить мяч по кольцу из различных положений (и это не считая бросков во время матчей и тренировок с товарищами по команде). Как видите, практические достижения в точности баскетбольных бросков достаточно впечатляющи, од-

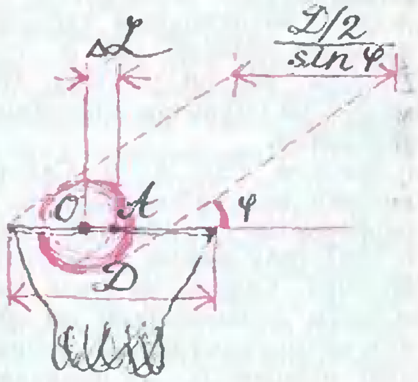
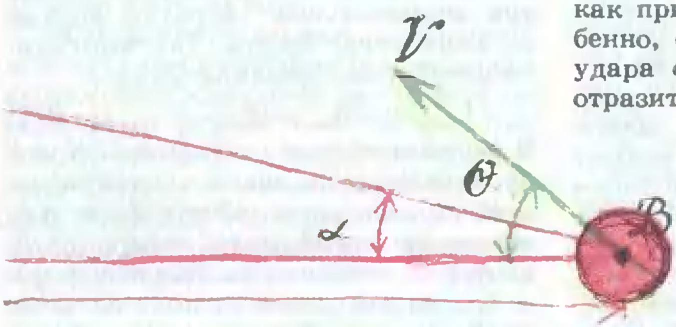


Рис. 2.

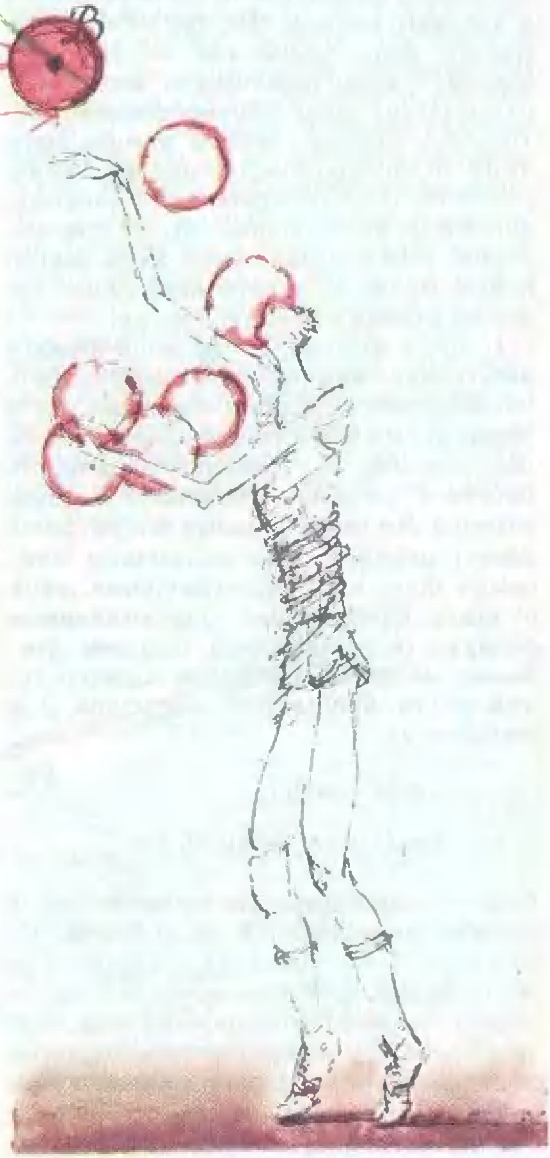
нако не мешает и «алгеброй гармонию поверить». Дело здесь не просто в удовлетворении любопытства, хотя для людей, увлекающихся не только баскетболом, но и наукой,— это всегда интересно. В настоящее время уже вряд ли кто будет спорить о полезности научных исследований для роста спортивных достижений, ставшей



фактом. Во всяком случае, для начинающих баскетболистов эта статья может оказаться полезной.

На рисунке 1 показаны основные фазы перемещения мяча при броске одной рукой с места. Попытаемся выяснить, под каким углом θ к горизонту желательно выпускать мяч из рук, чтобы обеспечить наибольшую точность броска.

Ограничимся приближенным исследованием, используя элементарные физические и математические представления. Высота кольца над полом H=3,05 м (интересно, что это та самая высота, на которой находились верхние ободы корзин из-под персиков, прибитых Нейсмитом к балконам гимнастического зала колледжа в Спрингфилде); внутренний диаметр кольца D=0,45 м, диаметр баскетбольного мяча примерно в два раза меньше. Пусть мяч входит в кольцо под углом φ к горизонту (рис. 2), причем будем считать, что траектория центра мяча пролегает в вертикальной плоскости, проходящей через центр кольца (возможное отклонение мяча от этой плоскости учитывать не будем, считая, что основной причиной промаха может быть лишь перелет или недолет мяча).



Тогда условие, при котором мяч пройдет через кольцо, не задев его, можно записать так:

$$|\Delta L| \leqslant l = \frac{D}{2}\left(1 - \frac{1}{2\sin\varphi}\right), \qquad (1)$$

где ΔL — смещение центра мяча (O) от центра кольца (A). Это условие имеет смысл при $\varphi > 30°$. Если $\varphi < 30°$, то мяч обязательно заденет кольцо и, как при этом обычно случается (особенно, если скорость мяча в момент удара о кольцо достаточно велика), отразится, не поразив корзины. Увеличивая угол φ, мы повышаем шансы попасть в корзину, поскольку при этом растет величина l. Так, если $\varphi=40^\circ$, то $l\approx0{,}05$ м, а при $\varphi=60^\circ$ $l\approx0{,}095$ м, т. е. почти вдвое больше. Предельно возможное значение $l\approx0{,}112$ м (при $\varphi=90^\circ$).

Очевидно, что угол φ тем больше, чем круче угол θ, под которым игрок бросает мяч в кольцо (см. рис. 1). Однако, бросая под очень крутыми углами ($\theta\gtrsim70^\circ$), довольно трудно попасть в корзину, по крайней мере с дальних дистанций. Трудно не только попасть, но иногда и просто добросить мяч до кольца — это требует больших усилий. (Если баскетболисты и бросают издали под крутыми углами, то чаще всего «не от хорошей жизни»: надо перекинуть мяч через руки защитника, плотно опекающего «своего» игрока.) Чтобы понять причину происходящего, проведем несложные теоретические исследования, дополнив их экспериментом, для которого необходимо иметь лишь шариковую ручку или карандаш, лист бумаги, линейку и транспортир.

Пусть в момент, когда баскетболист выпускает мяч из рук, центр мяча расположен в точке B (см. рис. 1) и через время t достигает центра кольца — точки A. Начальная скорость броска V, дальность броска (проекция отрезка BA на горизонтальную плоскость) равна L. Рассматриваем «чистый» бросок — без отражения мяча от щита. Пренебрегая сопротивлением воздуха (и защитника), опишем движение мяча как движение материальной точки, брошенной под углом θ к горизонту:

$$L=(V\cos\theta)\,t,$$

$$h=L\,\mathrm{tg}\,\alpha=(V\sin\theta)\,t-\frac{gt^2}{2}.$$

Угол φ, под которым мяч влетает в кольцо, определяется из условия

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{|V_{yA}|}{V_{xA}}=\frac{|V\sin\theta-gt|}{V\cos\theta},$$

где V_{xA} и V_{yA} — соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие скорости мяча в точке A. После простых преобразований получаем:

$$L=\frac{V^2}{g}\,\frac{\sin(2\theta-\alpha)-\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad(2)$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,\theta-2\,\mathrm{tg}\,\alpha).\qquad(3)$$

Исследуем полученные выражения. Из (2) видно, что при условии $2\theta-\alpha=90^\circ$ заданная дальность броска достигается при минимально возможной скорости и, следовательно, при минимальных затратах усилий на выполнение броска. Так что оптимальный угол бросания мяча —

$$\theta=\theta_{\text{опт}}=45^\circ+\frac{\alpha}{2}.\qquad(4)$$

В частном случае $\alpha=0^\circ$ (точки B и A расположены на одном уровне) $\theta_{\text{опт}}=45^\circ$ и, как видно из (3), $\varphi=\theta$. Для игрока со средним (не «баскетбольным») ростом мяч в завершающей фазе броска находится от пола на высоте $H'\approx2$ м. Наиболее «выгоден» в современном баскетболе точный бросок из-за так называемой шестиметровой линии, за который даются три очка (за попадание с более близкой дистанции засчитываются лишь два очка, а при штрафных бросках — одно очко). Полагая $h=H-H'=1{,}05$ м, $L=6$ м, получаем $\alpha=\mathrm{arctg}\,(1{,}05/6)\approx10^\circ$, т. е. $\theta_{\text{опт}}\approx50^\circ$. Из выражения (2) находим, что начальная скорость мяча при $\theta=\theta_{\text{опт}}$ в этом случае составляет 8,37 м/с; если бежать с такой скоростью, то стометровую дистанцию можно преодолеть за 11,9 с, что неплохо для рядового физкультурника, но значительно уступает мировому рекорду. Однако в отличие от легкой атлетики очень высокие скорости здесь не нужны: чем больше начальная скорость мяча, тем выше его скорость на входе в кольцо, а это, как уже упоминалось, увеличивает вероятность отскока мяча при касании кольца.

В пользу угла $\theta_{\text{опт}}$ свидетельствуют и более важные соображения, связанные с учетом влияния на дальность броска ошибки в угле бросания. Пусть при начальной скорости V и угле бросания θ центр мяча пройдет в корзину через центр кольца. Обеспечить абсолютную точность этих величин не под силу даже выдающемуся мастеру, поэтому начальная скорость мяча на деле окажется равной $V'=V+\Delta V$ ($\Delta V \ll V$), а угол бросания (здесь будем выражать углы не в градусной, а в радианной мере) — $\theta'=\theta+\Delta\theta$ ($\Delta\theta \ll 1$). В результате изменится дальность броска — она станет равной $L'=L+\Delta L$. Чтобы бросок был точным, необходимо выполнение условия (1); при этом, поскольку величина l достаточно мала, значение $|\Delta L|$ также должно быть малым.

Из выражения (2) видно, что ошибка в начальной скорости броска может существенно сказаться на его результативности — ведь $L \sim V^2$. (Отработка броска и связана в первую очередь с приобретением навыков, позволяющих достаточно точно задать начальную скорость мяча. Важно также не допускать отклонения мяча в сторону от плоскости, проходящей через центр кольца. Соответствующие навыки, даже при наличии большого баскетбольного таланта, можно приобрести лишь в результате упорных тренировок (вспомните Дражана Пе́тровича).)

Что же касается ошибки $\Delta\theta$ в угле бросания, то ее влияние на величину ΔL оценим, предполагая для простоты, что $\Delta V=0$ (т. е. начальная скорость броска является постоянной величиной). Для оценки используем выражение (2), пренебрегая возможным изменением угла α. Считая, что ошибка в угле бросания сравнительно мала, после несложных выкладок находим:

$$\Delta L = L\cdot 2\,\frac{\Delta\theta\cdot\cos(2\theta-\alpha)-(\Delta\theta)^2\sin(2\theta-\alpha)}{\sin(2\theta-\alpha)-\sin\alpha}. \tag{5}$$

(Если читателю не удастся самостоятельно получить это, прямо скажем, не слишком элегантное выражение, советуем посмотреть «Приложение» в конце статьи.)

Из выражения (5) следует, что изменение дальности броска, обусловленное ошибкой в угле бросания, прямо пропорционально дальности броска (не зря броски из-за шестиметровой линии оцениваются дороже, чем броски с более близкого расстояния). Однако важно в данном случае другое. Если пренебречь членом, включающим очень малую величину $(\Delta\theta)^2$, то при $\theta=\theta_{опт}$ имеем парадоксальный результат: $\Delta L=0$, т. е. дальность броска не зависит от ошибки в угле бросания. Если же в (5) не пренебрегать ничем, то зависимость ΔL от ошибки $\Delta\theta$ существует, хоть и достаточно слабая:

$$\Delta L = -\frac{2L(\Delta\theta)^2}{1-\sin\alpha}. \tag{6}$$

Таким образом, бросок под углом $\theta=\theta_{опт}$ является оптимальным не только потому, что требует минимальной начальной скорости, но и потому, что ошибка в угле бросания при $\theta=\theta_{опт}$ очень мало влияет на дальность броска.

Итак, результативность броска во многом зависит от способности игрока «выдерживать» нужное значение θ. Каково же допустимое значение $\Delta\theta$? Оценим его для частного случая $\alpha=0^\circ$, $L=6$ м. При этом $\theta_{опт}=\varphi=45^\circ$ (см. формулы (4) и (3)), и, как следует из (1), $l\approx 0{,}066$ м. Используя выражение (6), для $\Delta\theta$ получаем (переведя радианную меру в градусную): $|\Delta\theta| \lesssim 4{,}2^\circ$. Много это или мало? Доступна ли для среднего по психофизическим данным человека возможность не выйти за этот предел? К сожалению, мы обычно мало осведомлены о способностях собственного организма, а ведь для их выявления порой достаточно простого эксперимента. Этим мы сейчас и займемся.

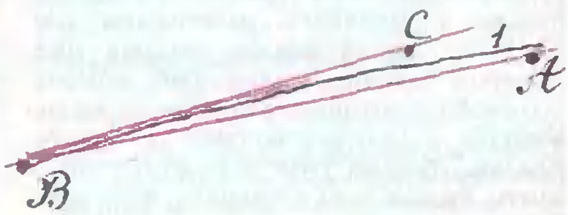


Рис. 3.

На листе бумаги обозначьте две точки: B и A (рис. 3). Установив кончик карандаша или шариковой ручки в точке B и глядя на точку A, попытайтесь быстро провести прямую, соединяющую эти точки. Конечно, полученная линия *1* будет отличаться от идеальной прямой и, возможно, не пройдет через точку A. С помощью линейки проведите прямую BA и прямую BC, примерно совпадающую с линией 1 на начальном ее участке. Теперь измерьте транспортиром угол ABC. Скорее всего, он окажется не больше $3-4°$, а после некоторой тренировки можно достигнуть еще лучшего результата. Предложенное упражнение, хоть и не связано непосредственно с баскетболом, характеризует точность движения вашей руки в зрительно заданном направлении. Разумеется, этот эксперимент нельзя отождествить с бросанием мяча. Но результат обнадеживает...

Теперь вернемся к нашим формулам. Посмотрим, под каким углом φ входит в кольцо мяч, брошенный под углом $\theta=\theta_{опт}=45°+\alpha/2$. Из выражения (3) с помощью несложных тригонометрических преобразований (те, кого уже утомили преобразования, могут сразу посмотреть «Приложение», п. 2) находим:

$$\varphi(\theta_{опт})=45°-\frac{\alpha}{2}.$$

Это означает, что при $\alpha>30°$ бросок под углом $\theta_{опт}$ вообще не будет точным, поскольку при $\varphi<30°$ мяч не может свободно пройти сквозь кольцо. Вообще говоря, и при $\alpha\approx 20°$ (т. е. $\varphi\approx\approx 35°$) вероятность попадания еще мала из-за того, что в этом случае относительно невелико значение l (см. условие (1)). Ситуация, когда угол α сравнительно крут, возникает в случае броска с близкого расстояния (до 1—2 м), когда высота кольца над центром мяча в начальный момент его свободного полета практически не меньше, а иногда и больше дальности броска. Однако угол α можно уменьшить, бросая мяч в прыжке, т. е. приближая центр мяча в начальный момент к уровню кольца. Обычно считается, что бросок в прыжке нужен для того, чтобы «переиграть» защитника, однако при бросках с близких дистанций, как следует из полученных результатов, прыжок способствует и увеличению точности броска.

Дополнительное уменьшение угла α при близких бросках может быть достигнуто за счет броска с отражением от щита. Схема такого броска

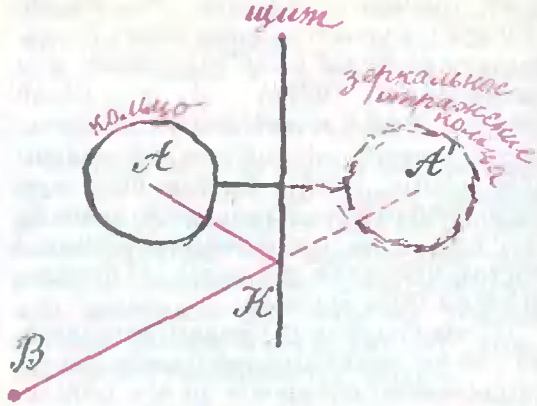


Рис. 4.

показана на рисунке 4, где изображена проекция траектории мяча на горизонтальную плоскость (K — точка отражения мяча от щита). Если приближенно считать удар мяча о щит абсолютно упругим, то начальные параметры броска должны быть таковы, чтобы при отсутствии щита обеспечить попадание мяча в зеркальное отображение кольца относительно плоскости щита (по траектории BKA'). Уменьшение угла α происходит в данном случае за счет увеличения дальности броска ($BK+KA>BA$). Понятно, что такой бросок производит игрок, находящийся несколько сбоку от кольца.

Во всех наших расчетах мы пренебрегали сопротивлением воздуха, и поэтому может возникнуть вопрос, насколько правомерны полученные результаты (ведь известно, что, если бы не сопротивление воздуха, винтовочная пуля пролетала бы примерно в 10 раз большее расстояние, чем в реальных условиях). Сила сопротивления воздуха зависит от формы движущегося тела (вспомните обтекаемые силуэты скоростных автомобилей и самолетов), от площади сечения, перпендикулярного направлению движения (не зря велосипедист-гонщик «складывается» почти вдвое при езде), и особенно значительно — от скорости движения тела. Сравнительно заметное воздействие может оказывать воздушная среда на движение теннисного, волейбольного и футбольного мячей; баскетбольный мяч подвержен этому в гораздо меньшей степени. Основная причина здесь в скоростях: любой мяч ударом можно заставить двигаться с большей начальной скоростью, чем толкая его пальцами руки. Так, скорость теннисного и футбольного мячей достигает 30 м/с, а скорость баскетбольного мяча обычно не превышает 10 м/с.

Вообще говоря, учет силы сопротивления воздуха для баскетбольного броска связан с решением дифференциальных уравнений, чем мы здесь, естественно, заниматься не будем, а укажем только результат. Хотя сила сопротивления воздуха несколько снижает дальность броска, ее влиянием на оптимальный угол броска можно пренебречь. Так, для бросков с расстояния до 6—7 м оптимальный угол ниже значения, определяемого по формуле (4), не более чем на 2—3°.

Движение мяча в принципе зависит и от его вращения вокруг своего центра. В такое вращение вовлекаются прилегающие слои воздуха, что в сочетании с поступательным движением воздуха относительно мяча приводит к возникновению силы, действующей на мяч перпендикулярно его траектории (эффект Магнуса). Не останавливаясь на этом интересном эффекте, заметим, что, в отличие, скажем, от тенниса (как большого, так и настольного), его влияние на движение баскетбольного мяча сравнительно мало.

Приложение

1. Изменение дальности броска при сделанных в статье предположениях равно

$$\Delta L = L' - L = \frac{V^2}{g}\frac{\sin(2\theta' - \alpha) - \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{V^2}{g}\frac{\sin(2\theta - \alpha) - \sin\alpha}{\cos\alpha} = L\frac{\sin(2\theta' - \alpha) - \sin(2\theta - \alpha)}{\sin(2\theta - \alpha) - \sin\alpha}.$$

Преобразуя разность синусов в числителе полученного выражения, имеем:

$$\sin(2\theta' - \alpha) - \sin(2\theta - \alpha) = 2\cos(2\theta + \Delta\theta - \alpha)\sin(\Delta\theta) = 2(\cos(2\theta - \alpha)\cos(\Delta\theta) - \sin(2\theta - \alpha)\sin(\Delta\theta))\sin(\Delta\theta).$$

Полагая, что величина $\Delta\theta$ выражена в радианах, и используя приближенные равенства $\sin x \approx x$ и $\cos x \approx 1$ при $x \ll 1$, получаем в итоге выражение (5).

2. Подставляя в выражение (3) $\theta = \theta_{опт} = 45° + \alpha/2$, получаем:

$$\varphi(\theta_{опт}) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta_{опт} - 2\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)} - \frac{4\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}\right) = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

Нам пишут

«Золотое сечение» в физике

Золотым сечением называется такое деление отрезка на две части, при котором бóльшая часть относится ко всему отрезку, как меньшая относится к большей. Нетрудно подсчитать, что это отношение равно $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$. Золотое сечение обладает удивительным свойством появляться в самых разных областях знания.

Известно, что ускорение силы тяжести при удалении от земной поверхности описывается следующей формулой (докажите!):

$$g_h = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2},$$

где h — высота над поверхностью Земли, R — ее радиус. При опускании тела в глубь Земли характер зависимости g от h меняется:

$$g_{-h} = g_0\left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

Зададимся вопросом, когда $g_h = g_{-h}$? Ясно, что одним из решений будет $h = 0$. Второе решение (которое вы сможете легко найти) таково:

$$h = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)R.$$

Это один из примеров появления золотого сечения в реальной физической задаче.

В. Дроздов

От редакции. ***Постоянные читатели «Кванта» хорошо знают, что означают четыре буквы: ВЗМШ. Это — Всесоюзная заочная математическая школа, вступительное задание которой печатается ежегодно в первом номере нашего журнала. В этом году ВЗМШ исполняется 25 лет. Мы решили предоставить Заочной школе страницы нашего журнала. Перед вами — первый материал «по мотивам» ВЗМШ. Автор этой статьи — один из энтузиастов ВЗМШ, член ее методической комиссии.***

ДАМА С СОБАЧКОЙ

Кандидат физико-математических наук
А. ТООМ

Давным давно, когда я был студентом мехмата МГУ, один из старших друзей спросил меня: «Знаешь «Даму с собачкой»?» — «Ну конечно»,— ответил я, имея в виду рассказ А. П. Чехова.— «Нет,— сказал собеседник,— я про другое. Есть такое доказательство основной теоремы алгебры». И тут же рассказал мне очень красивое (хотя и нестрогое) рассуждение, которое в итоге оказалось одним из самых ярких моих впечатлений за все годы учебы. Однако, несмотря на свою наглядность, доказательство это, давно уже вошедшее в «математический фольклор», по-моему, так до сих пор и не записано в своем наиболее доступном виде.

В заставке использована картина Дж. Балла «Собака на поводке» (1912).

Цель статьи — восполнить это досадное упущение.

Кто автор этого рассуждения — сказать трудно. Скорее всего, им следует считать К. Гаусса, который всю жизнь интересовался основной теоремой алгебры (называемой также теоремой Д'Аламбера — Гаусса) и дал несколько различных ее доказательств*). Мне говорили, что в обиход московских математических кружков и студенческих семинаров это рассуждение ввел А. Н. Колмогоров, но я не смог проверить, правда ли это. И я не знаю, кто первым украсил его образами Чехова.

Прежде чем приступить к самому доказательству, давайте вспомним основные понятия из теории комплексных чисел**). Те, кто с ними знаком, могут прямо перейти к четвертому разделу статьи.

Числа действительные и комплексные

Как известно, действительные числа естественно располагаются на числовой оси, т. е. на прямой, на которой отмечена точка O, выбран масштаб и положительное направление (рис. 1). Комплексные числа столь же естественно располагаются на комплексной плоскости, т. е. на плоскости, на которой задана система координат Oxy, причем ось Ox названа действительной, а ось Oy — мнимой (рис. 2). Точкам, лежащим на действительной оси Ox, соответствуют привычные нам действительные числа. Точкам, лежащим на мнимой оси Oy, соответствуют мнимые числа, снабженные специальным множителем i. Вообще любой точке с координатами (x, y) соответствует комплексное число $x+$ $+iy$, причем координата x называется его действительной, а координата y — его мнимой частью. Точке O — началу координат — соответствует комплексное число 0, у которого и действительная, и мнимая части равны нулю. Буква i в теории комплексных чисел обозначает число, соответствующее точке с координатами (0; 1).

Правила сложения, вычитания и умножения на действительное число для комплексных чисел такие же,

Рис. 1.

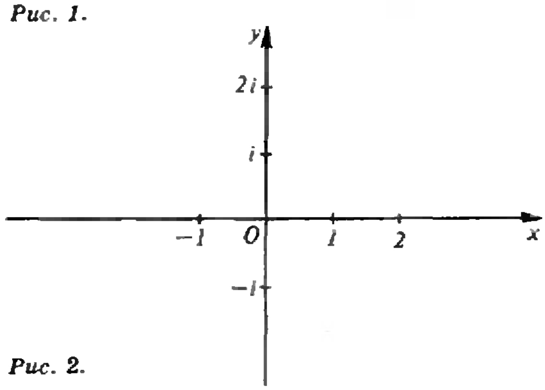


Рис. 2.

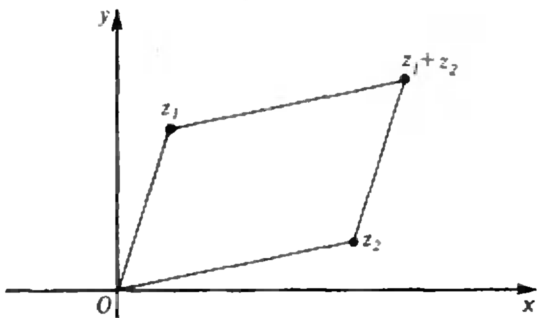


Рис. 3.

как для векторов:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)= \\ =(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)= \\ =(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

$$k(x+iy)=kx+iky.$$

Геометрически сложение комплексных чисел осуществляется по «правилу параллелограмма» (рис. 3), а

*) О жизни и деятельности этого великого ученого можно узнать, в частности, из только что вышедшей книги В. К. Бюлера «Гаусс. Биографическое исследование» (М., Наука, 1989).

**) Существует обширная популярная литература о комплексных числах, отчасти приведенная в конце статьи. Когда я учился в школе (это было еще до всех «усовершенствований» школьной программы последних трех десятков лет), знакомство с комплексными числами входило в школьную программу. В «Кванте» комплексным числам и расширению понятия числа была посвящена статья Л. С. Понтрягина «Обобщение чисел» (№ 2, 3 за 1985 год).

умножению на действительное число k соответствует гомотетия с центром O и коэффициентом k.

Умножение произвольных комплексных чисел основано на тождестве

$$i^2=-1.$$

Пользуясь им, получаем

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Можно определить и деление комплексных чисел — как действие, обратное умножению. Выражение z_1/z_2 имеет однозначный смысл всегда, когда $z_2\neq 0$, и определяется формулой

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

В частности,

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется сопряженным к числу $z=x+$ $+iy$. Очевидно, каждое комплексное число сопряжено к своему сопряженному: $\bar{\bar{z}}=z$, а точки $\bar{z}$ и z симметричны друг другу относительно действительной оси.

С комплексными числами можно делать все четыре действия арифметики, причем верны те алгебраические соотношения, которые позволяют выполнять привычные преобразования (перенос членов из одной части равенства в другую, приведение подобных членов, вынесение за скобки). На языке математики это означает, что комплексные числа образуют поле.

Упражнения

1. Выполните действия
а) $(1+i)(1-i)$; б) $(1+i)/(1-i)$; в) $(1+i)^4-$ $-(1-i)^4$.

2. Для каждого целого n укажите, чему равны: а) i^n; б) $(1+i)^n$.

3. Рассмотрим геометрическое преобразование комплексной плоскости, переводящее каждую точку z в точку $1/z$. а) Во что это преобразование переводит прямую $\{1+iy\}$? б) Докажите, что это преобразование переводит окружность, проходящую через точку O, в прямую, а окружность, не проходящую через точку O, в окружность.

Решение уравнений

Исторически комплексные числа возникли в математике благодаря стремлению сделать более стройной теорию решения алгебраических уравнений, т. е. уравнений вида

$$P(z)=0, \qquad (1)$$

где $P(z)$ — алгебраический многочлен n-й степени;

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0. \qquad (2)$$

Корнем уравнения (1) или, что то же самое, многочлена (2), называется такое значение z, при котором (1) истинно. Решить уравнение — значит найти все его корни.

Для того чтобы найти все корни многочлена, неплохо было бы знать заранее, сколько их. Путем построения подходящей системы определений математикам удалось создать ситуацию, в которой число корней многочлена всегда равно его степени. Покажем на примере квадратных уравнений, как им это удалось. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами

$$z^2+pz+q=0. \qquad (3)$$

Как известно, его корни выражаются формулой

$$z_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}, \qquad (4)$$

где дискриминант $D=p^2-4q$. Но, пока мы работаем только с действительными числами, эта формула теряет смысл при $D<0$, и наше уравнение не имеет корней. Получается разнобой: некоторые квадратные уравнения имеют два корня, некоторые — ни одного. Этот разнобой издавна вызывал у математиков чувство неудовлетворенности, приведшее к развитию теории комплексных чисел. В поле комплексных чисел формула (4) имеет смысл и при $D<0$, принимая вид

$$z_{1,2}=\frac{-p\pm i\sqrt{-D}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), легко убедиться, что получается истинное равенство.

Правда, остается еще случай, когда $D=0$: в этом случае существует только один корень $z_1=z_2$. Но мы будем считать, что этот корень двукратный, потому что и в этом случае, как и во всех прочих, наш квадратный трехчлен разлагается на множители

$$z^2+pz+q=(z-z_1)(z-z_2).$$

Более громоздкое, но, в сущности, не такое уж трудное, рассуждение показывает, что и при произвольных комплексных значениях коэффициентов p и q уравнение (3) тоже имеет два комплексных корня.

Итак, вводя подходящие определения, мы пришли к ситуации, в которой у всякого квадратного уравнения есть два корня. Аналогичное верно и для всех степеней.

Основное утверждение, к которому мы стремимся прийти в этой статье, состоит в следующем. Всякий многочлен n-й степени (2) разлагается в поле комплексных чисел на n множителей

$$p(z)=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n), \quad (5)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — все корни нашего многочлена (некоторые из них могут совпадать друг с другом). При этом коэффициенты многочлена (2) могут быть комплексными.

Во всяком деле труднее всего первый шаг. Так и здесь: труднее всего доказать, что всякий многочлен степени $n\geqslant 1$ имеет хотя бы один комплексный корень. Это последнее утверждение (может быть, именно потому, что в нем главная трудность) и называется обычно *основной теоремой алгебры.*

Обратим внимание на один частный случай, когда утверждение основной теоремы алгебры сравнительно очевидно. Пусть все коэффициенты многочлена (2) — действительные числа и n нечетно. В этом случае многочлен заведомо имеет хотя бы один действительный корень. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим график $P(x)$, где x пробегает действительную числовую ось, а именно — поведение этого графика при x, удаляющемся по оси в бесконечность влево и вправо. При больших по модулю значениях x поведение многочлена определяется поведением его старшего члена x^n, по сравнению с которым сумма всех остальных членов — мелочь, которой можно пренебречь. Вместе с x^n наш многочлен уходит в «плюс бесконечность» при $x\to\infty$ и в «минус бесконечность» — при $x\to-\infty$. Поэтому $P(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Но график многочлена — непрерывная кривая, и раз эта кривая в одном месте расположена выше оси абсцисс, а в другом месте — ниже, то она должна хоть раз пересечь эту ось. Разумеется, это рассуждение нестрогого, но, прежде чем учиться рассуждать строго, имеет смысл ознакомиться с теми идеями, ради которых стоит строить сложный аппарат строгих рассуждений.

Чуть позже мы дадим столь же нестрогое доказательство основной теоремы алгебры. Но сначала обсудим геометрический смысл умножения комплексных чисел.

Упражнения

4. Решите уравнения

а) $z^2+iz=0$; б) $z^2+i=0$; в) $z+\dfrac{1}{z}=1$.

5. Докажите, что если все коэффициенты уравнения — действительные числа, то множество его корней на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси. Отсюда еще раз выведите, что уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

6. Для произвольного комплексного числа $p+iq$ решите уравнение

$$z^2=p+iq.$$

7. Докажите *теорему Виета*

$$z_1+z_2=-p, \quad z_1\cdot z_2=q,$$

где z_1 и z_2 — корни уравнения (3), p и q — любые комплексные числа.

8. Решите в комплексных числах уравнения и покажите их корни на комплексной плоскости

а) $z^4-1=0$; б) $z^3-1=0$; в) $z^6-1=0$.

При перемножении нескольких комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

Как известно, модуль действительного числа равен расстоянию от точки

x до точки O на числовой оси. Аналогично, модуль комплексного числа — это расстояние от соответствующей точки до точки O на комплексной плоскости. Из теоремы Пифагора можно вывести следующую формулу

$$|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между изображающими их точками на комплексной плоскости.

Докажем, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей:

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

Пусть

$$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2.$$

Тогда

$$|z_1z_2|=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}=$$
$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=|z_1|\cdot|z_2|,$$

что и требовалось доказать.

Теперь нам надо ввести величину, характеризующую «направление» комплексного числа. Назовем аргументом $\operatorname{Arg}(z)$ комплексного числа z тот угол, на который луч Oz повернут относительно положительной полуоси Ox. Поворот против часовой стрелки считается положительным, поворот по часовой стрелке — отрицательным. Только у нуля нет аргумента. У всякого же комплексного числа $z\neq 0$ есть аргумент, определенный с точностью до слагаемого $360°\cdot n$, где n — любое целое число. Например,

$$\operatorname{Arg}(1)=360°\cdot n,$$
$$\operatorname{Arg}(i)=90°+360°\cdot n,$$
$$\operatorname{Arg}(-1)=180°+360°\cdot n,$$
$$\operatorname{Arg}(-i)=270°+360°\cdot n.$$

Впрочем, все эти формулы можно писать и в ином виде, например

$$\operatorname{Arg}(-i)=-90°+360°\cdot n.$$

Выберем комплексное число z_0, модуль которого равен единице, и покажем, что умножение всех комплексных чисел на z_0 есть поворот комплексной плоскости вокруг точки O на аргумент z_0.

Прежде чем читать дальше, рассмотрите геометрический смысл умножения на z_0 в четырех частных случаях:

$$z_0=\pm 1 \text{ и } z_0=\pm i.$$

Во всех четырех случаях получается поворот вокруг точки O на некоторый угол, не правда ли?

Итак, рассмотрим умножение на произвольное число z_0, модуль которого равен единице. Выше мы говорили, что расстояние между точками z_1 и z_2 — это модуль разности чисел z_1 и z_2. Пользуясь этим, покажем, что при умножении на z_0 расстояние между точками сохраняется:

$$|z_1z_0-z_2z_0|=|(z_1-z_2)z_0|=$$
$$=|z_1-z_2|\cdot|z_0|=|z_1-z_2|.$$

Всякое геометрическое преобразование, при котором расстояние между точками не меняется, называется движением (к нему близко понятие твердого тела в физике). В данном случае движение оставляет на месте точку O и не оставляет на месте никакую другую точку, а такое движение есть поворот вокруг точки на некоторый угол. На какой угол? На тот самый угол, на который луч Oz_0 повернут относительно положительной полуоси Ox, т. е. на $\operatorname{Arg} z_0$.

Теперь разберемся в том, что происходит с комплексными числами при умножении их на произвольное число z_0, отличное от нуля. Для этого разложим z_0 на два множителя, один из которых действительный и равен $|z_0|$, а другой имеет модуль 1 и равен $z_0/|z_0|$. Умножение на первый множитель — гомотетия, при которой аргумент не меняется, а модуль умножается на $|z_0|$. Умножение на второй множитель — поворот, при котором модуль не меняется, а аргумент увеличивается на $\operatorname{Arg}(z_0)$.

Вот мы и доказали, что при перемножении двух произвольных комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Опираясь на это, легко доказать аналогичное утверждение и для любого числа сомножителей.

Важный частный случай: если комплексное число возводится в n-ю степень, то его модуль возводится в n-ю степень, а аргумент умножается на n. Формула, выражающая это утверждение, называется *формулой Муавра*. Благодаря этому факту мы можем понять, как расположены на комплексной плоскости корни уравнения

$$z^n - 1 = 0. \qquad (6)$$

Эти корни — вершины правильного n-угольника с центром в точке O, одна из вершин которого — точка 1. Решая уравнение (6) алгебраически (если это удается сделать), мы получаем выражения для тригонометрических функций углов вида $k \cdot 360°/n$.

Упражнения

9. Докажите, что три различные точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой, если и только если

$$(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)$$

— действительное число.

10. Докажите, что треугольник $z_1z_2z_3$ подобен треугольнику $z_1'z_2'z_3'$, если и только если

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3' - z_1'}{z_2' - z_1'}.$$

11. Докажите, что точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника с центром O, если и только если

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0, \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| > 0. \end{cases}$$

12. Какую геометрическую фигуру на комплексной плоскости образуют решения уравнения

$$3|z| = 2|z - 5|?$$

13. Решите уравнение

$$z^5 - 1 = 0$$

двумя различными способами: с помощью формулы Муавра и без нее. Опираясь на полученные данные, вычислите синусы и косинусы углов в 72° и 144°. Опишите способ построения правильного пятиугольника циркулем и линейкой.

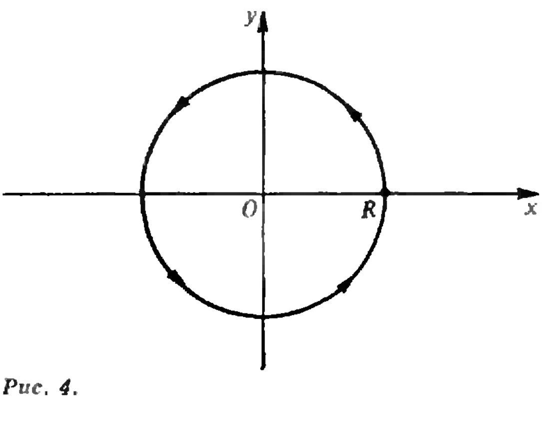


Рис. 4.

14. Пусть требуется вычислить сумму

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta).$$

С помощью комплексных чисел сведите эту задачу к вычислению суммы геометрической прогрессии.

Дама выходит из дома

Вспомните, как в конце второго раздела статьи нам помогло то, что мы рассматривали большие по модулю значения переменной. Так мы поступим и сейчас, с той, однако, разницей, что теперь у нас не действительные, а комплексные числа. Зафиксируем большой радиус R и предположим, что комплексное число z обходит окружность радиусом R с центром O. Пусть z начинает свой путь в точке R (т. е. в точке с координатами $(R, 0)$), движется по окружности в положительном направлении (против часовой стрелки) и заканчивает свой путь в той же самой точке R (рис. 4).

Точка z^n при этом движется по окружности радиусом R^n (так как модуль числа z^n есть n-я степень модуля z), но обходит ее не один, а n раз (так как аргумент z^n равен аргументу z, умноженному на n). Поскольку точка z^n ведет себя так хорошо и чинно, мы ее назовем Дамой. Дама выходит из своего дома, расположенного в точке R^n, совершает моцион, обходя n раз окружность радиусом R^n с центром O, и возвращается домой.

Многочлену $P(z)$ (см. формулу (2)) отводится в этом рассказе роль Собачки, потому что его путь проследить гораздо сложнее. Во всяком случае, мы знаем, что $P(z)$ тоже непрерывно движется по комплексной плоскости, начиная и заканчивая свой путь в точке $P(R)$ — в конуре.

Оценим расстояние между Дамой и Собачкой:

$$|P(z) - z^n| = |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0| \leqslant |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2} \times z^{n-2}| + \ldots + |a_1 z| + |a_0| = |a_{n-1}| \cdot R^{n-1} + |a_{n-2}| \cdot R^{n-2} + \ldots + |a_1| \cdot R + |a_0| \leqslant (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|) \times R^{n-1} = L.$$

Мы воспользовались тем, что модуль

суммы комплексных чисел не больше, чем сумма их модулей. Геометрически это очевидно: длина ломаной, составленной из векторов, отвечающих этим числам, не превосходит расстояния между ее концами. Кроме того, в последнем неравенстве мы предположили, что $R \geqslant 1$; это неудивительно, так как мы уже говорили, что R — большое число. L — это длина поводка, на котором Дама держит Собачку: при каждом значении z Собачка не может удалиться от Дамы на расстояние, большее L. Теперь мы можем придать точный смысл словам «R — большое число», а именно придадим R значение

$$R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + 1.$$

Ясно, что при этом значении R длина поводка L меньше радиуса R^n того круга, по которому гуляет Дама. Отсюда следует, что на своем пути Собачка, как и Дама, n раз обходит вокруг точки O.

Чтобы пояснить это важное соображение, для наглядности предположим, что к ошейнику Собачки подвешен клубок нити, конец которой закреплен в конуре. Когда Собачка совершает свой путь, клубок разматывается, и нить остается лежать на плоскости, отмечая траекторию Собачки. Концы нити совпадают. Итак, траекторию Собачки отмечает замкнутая нить, уложенная на плоскость так, что она делает n петель вокруг точки O.

А теперь внимание: наступает самый ответственный момент нашего рассуждения! Мы начинаем менять параметр R от R_0 до нуля. Будем называть этот процесс стягиванием. При стягивании радиус того круга, по которому гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему проходит n кругов с центром O. Только когда R становится равным нулю, эти круги стягиваются в точку O. Как в процессе стягивания меняется траектория Собачки — это вопрос сложный, но во всяком случае ее траектория меняется непрерывно, и при $R=0$ стягивается в точку a_0, а при R, близком к нулю, траектория близка к точке a_0.

Давайте исключим из рассмотрения случай $a_0=0$, потому что в этом случае утверждение теоремы очевидно: у нашего многочлена есть корень 0. Тогда при R близком к нулю траектория Собачки, будучи при всех z близка к $a_0 \neq 0$, не обходит вокруг точки O ни разу.

Итак, в процессе стягивания число обходов траектории Собачки вокруг точки O уменьшается от n до нуля. Поскольку число это целое, оно меняется скачками, т. е. является разрывной функцией от R. Выберем какое-нибудь значение R, являющееся точкой разрыва этой функции, и подумаем о том, какова траектория Собачки при этом значении R. Ясно, что при этом значении R траектория Собачки проходит через точку O. Но каждая точка этой траектории — значение нашего многочлена. Раз хотя бы одна из этих точек совпадает с нулем, значит у многочлена есть корень!

Итак, мы доказали, что у каждого многочлена $P(z)$ ненулевой степени есть хотя бы один корень z_1. Тогда, по теореме Безу (см. заметку «Уравнения, которые удается решить» в этом номере журнала), данный многочлен раскладывается в произведение

$$P(z) = (z - z_1) \cdot P_1(z).$$

К $P_1(z)$ (если его степень положительна) мы можем применить то же самое рассуждение и доказать, что у него тоже есть хотя бы один корень z_2, и, снова применив теорему Безу, получим

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot P_2(z).$$

Повторяя это рассуждение n раз, мы наконец-то получаем разложение (3) произвольного многочлена n-й степени на n множителей, к которому все время стремились.

Упражнение

15. Пусть комплексное число z выходит из точки 1, обходит окружность радиусом 1 с центром O и возвращается в ту же точку 1. Начертите линию, по которой при этом движется точка:

а) $1/z$; б) $z + \frac{1}{z}$; в) z^2+z+1; г) $(z-1)^n$.

(Окончание см. на с. 26)

Нам пишут

Об одной комбинаторной формуле

В «Кванте» № 3 за 1989 год в разделе «Нам пишут» была опубликована формула для числа способов выбора k из n чисел $1, 2, \ldots, n$ с условием, что любые два выбранных числа отличаются не меньше, чем на p:

$$\frac{(n+k-pk+p-1)!}{k!(n-pk+p-1)!}. \qquad (1)$$

Наш постоянный читатель московский математик *Л. М. Коганов* предлагает следующий вывод формулы (1).

Сопоставим каждому способу выбора k из n чисел «слово» из n символов 0 и 1, ставя 1 на месте выбранных чисел из конечной последовательности $1, 2, \ldots, n$, и 0 — на остальных $n-k$ местах:

$$\underbrace{0\ldots0}_{a}1\underbrace{0\ldots0}_{b_1}1\underbrace{0\ldots0}_{b_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{b_{k-1}}1\underbrace{0\ldots0}_{c}. \qquad (2)$$

Каждое слово вида (2) однозначно кодирует выбор k чисел. Нам нужно выяснить, сколько существует слов, удовлетворяющих следующим условиям: $b_1 \geqslant p-1$, $b_2 \geqslant p-1$, ..., $b_{k-1} \geqslant p-1$ (это значит, что разность выбранных чисел не меньше, чем p) и $a+b_1+b_2+\ldots+b_{k-1}+c=n-k$ (это значит, что выбрано ровно k чисел).

Удалим из каждой внутренней серии нулей, ограниченной слева и справа единицами, по $(p-1)$ нулей (т. е. уменьшим каждое b_i на $p-1$). Мы получим «слово» из k единиц и $N=n-k-(k-1)(p-1)$ нулей, причем исходное «слово» (2) однозначно восстанавливается по этому новому «слову». Число таких новых «слов» равно $\binom{N+k}{k}$ — чтобы определить «слово», достаточно выбрать k мест, на которых стоят единицы. И, поскольку число новых «слов» есть искомое число «слов» вида (2), формула (1) доказана.

Другой читатель (и автор) «Кванта» *В. С. Шевелев* из Ростова-на-Дону обнаружил формулу (1) в опубликованной в 1986 году работе китайского математика Джиньзонга Мао. В этой статье приведена также формула для числа способов выбора k из n элементов, расположенных по окружности так, чтобы, между любыми двумя выбранными располагалось не менее, чем $(p-1)$ элементов. Это число равно

$$\frac{n}{k}\binom{n-pk+k-1}{k-1}. \qquad (3)$$

В. С. Шевелев обобщил формулы (1) и (3). Обозначим через $C_n^k(r, m)$ число сочетаний из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по k, в которых имеется r нарушений естественного порядка следования элементов (разрывов), причем каждый разрыв имеет длину не меньше, чем m. Например, если $r=k-1$, $m=p-1$, то речь идет о сочетаниях, в которых разность любых двух элементов не меньше, чем p. Аналогичный смысл имеет обозначение $D_n^k(r, m)$ — только числа располагаются не линейно, а по кругу. Вот формулы, полученные В. С. Шевелевым:

$$C_n^k(r, m) = \binom{k-1}{r}\binom{n-k-(m-1)r+1}{r+1};$$
$$1 \leqslant k \leqslant n;\ 0 \leqslant r \leqslant k-1,$$

$$D_n^k(r, m) = \frac{n}{r}\binom{k-1}{r-1}\binom{n-k-(m-1)r-1}{r-1};$$
$$1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 1 \leqslant r \leqslant k.$$

Надеемся, что вы сможете доказать эти формулы самостоятельно.

Числа C и D выражаются друг через друга:

$$(n-k-r(m-1))D_n^k(r, m) = nC_{n-m}^k(r-1, m)$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям, которые задаются следующим образом. Пусть

$$P_n(x) = \Sigma_k C_n^k(k-1, m)x^k,$$
$$Q_n(x) = \Sigma_k D_n^k(k, m)x^{k-1},$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + xP_{n-m-1}(x),\ n \geqslant m+2$$

с начальными условиями $P_i(x)=1+ix$, $i=1, 2, \ldots, m+1$;

$$Q_n(x) = Q_{n-1}(x) + xQ_{n-m-1}(x) + 1,\ n \geqslant m$$

с начальными условиями $Q_i(x)=0$ при $i=1, 2, \ldots, m$, $Q_{m+1}(x)=m+1$.

Интересное свойство многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ выражается следующими формулами:

$$P_{n-1}(-1) = \begin{cases} -1, & \text{если } n=6t-2 \text{ или } 6t-3, \\ 0, & \text{если } n=6t-1 \text{ или } 6t-4, \\ 1, & \text{если } n=6t \text{ или } 6t-5, \end{cases}$$

$$Q_n(-1) = \begin{cases} -1, & \text{если } n=6t, \\ 0, & \text{если } n=6t-1 \text{ или } 6t-5, \\ 2, & \text{если } n=6t-2 \text{ или } 6t-4, \\ 3, & \text{если } n=6t-3. \end{cases}$$

Еще одно наблюдение В. С. Шевелева состоит в том, что при $n \geqslant m^2+m$ все числа

$$D_n^k(k, m),\ k=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{m+1}\right]$$

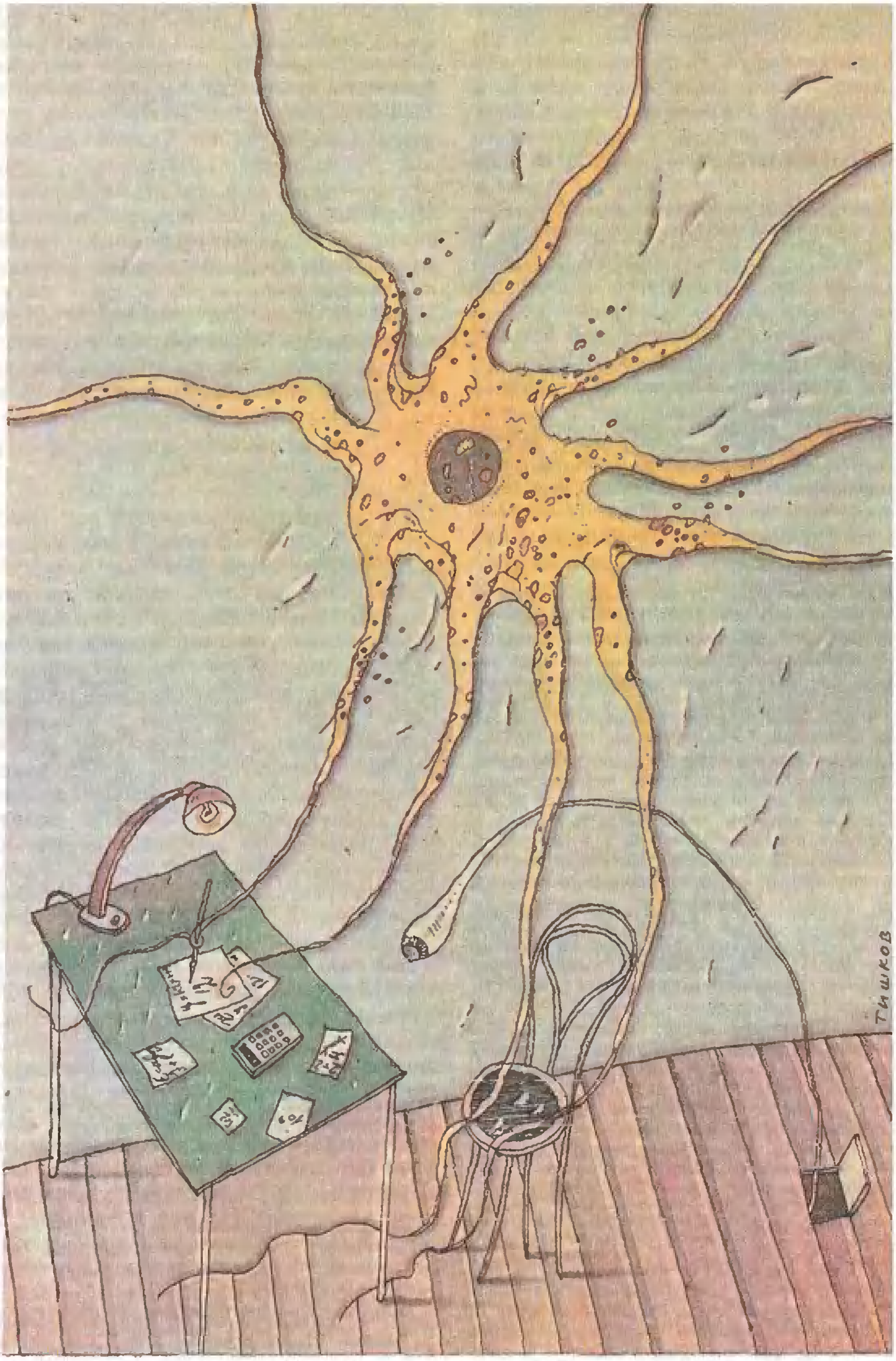
делятся на n тогда и только тогда, когда n — простое число.

В заключение сформулируем гипотезу, к которой привело В. С. Шевелева изучение чисел $C_n^k(r, m)$ и $D_n^k(r, m)$. Рассмотрим семейство многочленов $R_n(x)$, заданных соотношением

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) + x(R_{n-2}(x) + R_{n-3}(x)) + 2$$

с начальными условиями $R_1(x)=0$, $R_2(x)=2$, $R_3(x)=6$. Все коэффициенты многочлена $R_n(x)$ делятся на n тогда и только тогда, когда n — простое число.

Если Вам удастся придумать простые и красивые доказательства приведенных результатов или продвинуться в доказательстве гипотезы, обязательно пришлите их в «Квант».


ТИШКОВ

От редакции. Как уже говорилось во введении к статье А. Тоома в этом номере журнала, в 1990 году исполняется 25 лет Всесоюзной заочной математической школе. У ВЗМШ есть биологическое отделение), которое тоже отмечает юбилей — пятнадцатилетний. Мы поздравляем биологов ВЗМШ и представляем нашим читателям статью двух авторов, стоявших у истоков ВЗМШ и ее биологического отделения и продолжающих активную работу в заочной школе и сейчас.*

МАТЕМАТИКА В ЖИВЫХ ОРГАНИЗМАХ

Кандидат биологических наук
М. БЕРКИНБЛИТ,
кандидат педагогических наук
Е. ГЛАГОЛЕВА

Живая природа сделала множество «изобретений», которые люди поняли и смогли повторить лишь при соответствующем уровне развития науки и техники. Например, принцип эхолокации эффективно используют и дельфины, и летучие мыши, а в технике он появился только в XX веке; поиск добычи по инфракрасному излучению используют многие виды змей, в то время как очки для ночного видения созданы лишь недавно и т. д. До последнего времени бытовало убеждение, что природа не изобрела колеса, что здесь техника пошла своим оригинальным путем. Но оказалось, что жгутики бактерий вращаются в специальных «подшипниках» и, значит, колесо тоже «изобретено» природой еще на самых ранних этапах эволюции. Существует специальная наука — бионика, которая изучает «патенты природы». Оказывается, что их можно иногда использовать и в «человеческой» технике.

Менее известно, что в живых организмах происходят явления, которые позволяют считать, что природе принадлежит «приоритет» и в создании своеобразных ЭВМ — устройств, производящих операции, весьма сходные с математическими операциями, которые мы склонны считать достижением человеческой науки*). Похоже, что здесь повторяется история с изобретением колеса.

О некоторых таких операциях мы и расскажем в этой статье: о том как «считают» нервные клетки, как «логарифмирует» глаз (и зачем ему это понадобилось), как оперирует с векторами и тригонометрическими функциями мозг кошки и обезьяны (и наш с вами тоже). Может быть, кто-нибудь решит, что и изучать эти вещи не надо, раз это дано от природы. А, может быть, некоторые — мы надеемся, что таких будет больше,— захотят узнать о математической и биологической стороне дела.

Как считают нейроны

Первое знакомство с математикой — это счет: «Раз, два, три, четыре, пять, вышел зайчик погулять». И самым простым кажется и считается натуральное число. Уже отрицательные числа очень медленно входили в математику. Появившись в раннем средневековье у математиков Индии, они лишь в XIII—XIV веках проникают в европейскую науку, встречая там поначалу весьма сдержанное отношение. Их называют «ложными», «абсурдными» числами. Но постепен-

*) Конкурсные задачи для поступления на биологическое отделение публикуются в журнале «Наука и жизнь» № 1 за 1990 год.

*) Это действительно ЭВМ, так как действия этих устройств основаны на электрических явлениях в организме.

но отрицательные числа доказали свое право на существование и стали привычными не только для специалистов — то, что было «на переднем крае науки» в средние века, сегодня спокойно воспринимают пятиклассники.

А вот в живых организмах, оказывается «все наоборот»: нервной клетке (нейрону) естественно и просто осуществлять операции с положительными и отрицательными действительными «числами», а для того чтобы «считать» даже до двух, требуется система из нескольких нейронов — примитивный «мозг».

Как же работает нейрон? Как всякая клетка, нейрон отделен от наружной межклеточной среды особой оболочкой — мембраной. Между внутренним содержимым клетки и наружной средой существует разность потенциалов. Если клетка находится в покое, разность потенциалов на ее мембране не меняется. Эту разность потенциалов в покое естественно принять за нулевой уровень (подобно тому, как приняли за нулевую температуру таяния льда).

На нейрон могут действовать другие нервные клетки — возбуждающие и тормозные. Сигналы, полученные от этих клеток, вызывают изменения разности потенциалов на мембране в двух противоположных направлениях*). Когда разные сигналы приходят к нейрону одновременно, они складываются, причем, естественно, с учетом знака, т. е. нейрон суммирует приходящие к нему положительные и отрицательные сигналы; эта сумма может быть положительной или отрицательной.

Интересная особенность работы нейрона состоит в том, что в отличие от технических сумматоров — от древнего абака до ЭВМ — полученную сумму он «помнит» недолго: если внешние воздействия прекратились, то накопленная сумма начинает убывать по абсолютной величине, чтобы нейрон возвратился в состояние покоя (потенциал на мембране стремится к значению, которое мы приняли за нуль).

*) Как возникают эти сдвиги потенциала, вы можете прочитать в книге «Электричество в живых организмах» («Библиотечка «Квант», вып. 69).

Такая вроде бы «ненадежность» нейрона связана с тем, что он предназначен не для хранения, а для передачи и преобразования информации: полученный сигнал нейрон передает другим клеткам нервной сети (клеткам-«мишеням» или «адресатам»). По способу передачи сигнала существуют два разных типа нейронов с разными принципами работы: «аналоговые» и «пороговые» нейроны.

Нейрон первого типа действует на клетки-мишени с силой, пропорциональной накопленной сумме,— но только в том случае, когда эта сумма положительна. Когда же сумма отрицательна, то она дальше не передается — нейрон заторможен. Правило преобразования сигналов аналоговыми нейронами описывается формулой $y=k(x+|x|)/2$, где x — накопленный потенциал, y — величина переданного сигнала, а k — коэффициент пропорциональности.

Нейроны второго типа работают иначе. Такой нейрон «молчит», пока сумма воздействий не достигнет некоторой определенной положительной величины — «порога». Тогда нейрон возбуждается и посылает по своему выходному отростку — аксону — электрический импульс (всегда одной и той же величины), который и действует на клетки-мишени. После возбуждения нейрон некоторое время «отдыхает» — молчит, независимо от того, действуют на него другие клетки или нет, а затем, если к концу отдыха накопленная сумма выше порога, посылает новый импульс. В результате в зависимости от величины входного сигнала, его длительности и в зависимости от характеристик нейрона на выходе получается сигнал в виде серии импульсов постоянной величины, но разной частоты. Таким образом, пороговые нейроны используют совершенно нетривиальный принцип кодирования информации частотой сигнала.

Однако, как и непрерывный выходной сигнал нейронов аналогового типа, изменение частоты несет информацию только о величине входного сигнала, меняющейся непрерывно. В то же время известно, что животные умеют считать (например, выдавать реакцию только на каждый третий стимул). Естественно предположить, что в нервной системе имеются устройства, которые по-разному реагируют, например, на двукратное воздействие и на однократное. То, что известно о принципах работы нейронов, позволяет утверждать: одиночной нервной клетке такая «простая» с человеческой точки зрения операция, как счет, не под силу. Недостаток места не позволяет нам описать устройство из нескольких нейронов, способное выдавать ответ, например, на каждый второй стимул.

Глаза и логарифмы

Зрительные рецепторы, так же, как и другие — слуховые, температурные и т. д., получают сигналы из внешнего мира; они должны передать зрительную информацию в мозг точно и своевременно. Передача сигналов от глаза к мозгу осуществляется нейронами «порогового» типа—аналоговый способ оказывается неприменимым при передаче сигналов на достаточно большие расстояния. А у пороговых нейронов, как уже говорилось, все импульсы совершенно одинаковы, и сведения о величине входного сигнала эти нейроны передают меняя частоту импульсации.

Тут возникает вот какая проблема. Освещенность в сумерках, когда предметы еле видны, отличается от освещенности при ярком солнечном свете примерно в миллиард (т. е. в 10^9) раз. Максимальная же частота, с которой может работать нейрон — 1000 импульсов в секунду. Легко сообразить, что нельзя передавать информацию, меняя частоту работы нейрона пропорционально освещенности: если при ярком свете частота импульсов будет максимальной (1000 имп/с), то при уменьшении освещенности в миллион раз сигнал будет поступать всего один раз в 15 минут. Но за это время он совершенно потеряет свою актуальность!

Но может быть, разумно такое устройство зрительной системы, когда разные ее элементы, разные нейроны работают каждый в своем диапазоне освещенности: одни в сумерки, другие в пасмурный день, третьи на ярком солнце. Простой подсчет показывает, что если принять за нижнюю границу частоты работы нейрона, необходимой для достаточно своевременной передачи информации, 1 имп/с, то для охвата диапазона изменения освещенности в миллиард раз потребуется миллион нейронов — и это без всякого «запаса» прочности, без дублирования их работы! Но главное вот что: в каждый момент будет работать только одна клетка из миллиона, а остальные 999 999 будут «даром есть хлеб»: ведь в отличие от технических, живые «механизмы» потребляют энергию (свой «бензин») не только во время работы. А экономия энергии в живой природе — одно из главных условий выживания.

Итак, линейная зависимость между входными и выходными сигналами в случае глаза оказывается нецелесообразной. И действительно, в природе в этом случае используется другая функция, по школьным меркам довольно сложная.

Экспериментально это было установлено в 1932 году английским ученым Х. Харлайном. На рисунке 1 приведены результаты его исследования. Он регистрировал нервные им-

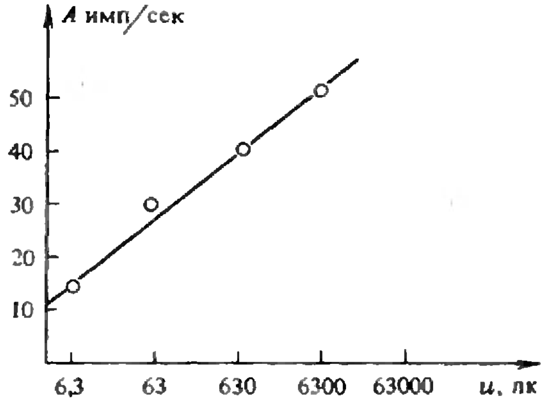


Рис. 1.

пульсы, идущие по одиночному нервному волокну от глаза к мозгу, у мечехвоста (морского членистоногого, похожего на вымерших трилобитов)*). На графике показана зависимость частоты импульсации от яркости света.

«Но позвольте! — скажете вы.— На графике прямая линия — значит, это линейная функция.» Не торопитесь, вглядитесь в шкалу на горизонтальной оси, она ведь неравномерна, нелинейна: при сдвиге на одно деление аргумент (яркость) меняется не на одну и ту же величину, а в одно и то же число раз.

При линейной зависимости равным приращениям аргумента соответствуют равные приращения функции, или, что то же самое, линейная зависимость переводит арифметическую прогрессию значений аргумента в арифметическую же прогрессию значений функции. Когда мы имеем дело с показательной функцией $y=a^x$, то равным приращениям аргумента соответствует равномерный *относительный* прирост функции. Например, при постоянных условиях обитания и неограниченных ресурсах так растет численность какой-либо популяции: число особей за каждый год увеличивается на 10%, т. е. в 1,1 раза. Другими словами, показательная функция «переводит» арифметическую прогрессию в геометрическую. На нашем графике ситуация обратная: частота импульсации нейрона меняется на одну и ту же величину, когда воздействие меняется в одно и то же число раз. Значит, мы имеем дело с функцией, обратной к показательной, т. е. с логарифмической; иными словами, нейроны глаза мечехвоста превращают геометрическую прогрессию раздражений в арифметическую прогрессию сигналов.

Это свойство зрительных рецепторов, выработавшееся в ходе эволюции, позволяет глазу работать эффективно и экономно, обеспечивает возможность хорошо воспринимать контраст. Пусть светлый и темный предметы различаются по способности отражать свет в десять раз. Тогда и на ярком солнце, и в сумерках светлый предмет будет отражать в десять раз больше света, чем темный. Поэтому сравнительная яркость этих предметов не меняется; не меняется и расстояние между соответствующими точками на оси абсцисс. А это означает, что разница частот работы рецепторов, на которые падает свет от этих двух предметов, будет оставаться неизменной при разных освещенностях. Так что «умение логарифмировать» позволяет глазу не только работать в широком диапазоне освещенностей, но и при малой освещенности различать предметы, абсолютная разность освещенностей которых очень мала.

Интересно, что описанная зависимость между внешним сигналом (раздражением) и сигналом, воспринимаемым мозгом (ощущением), первоначально была обнаружена психологами. Сделал это французский ученый П. Бугер еще в XVIII веке. В начале XIX века немецкий физиолог и психолог Э. Вебер детально изучил связь между раздражением и ощущением. Он выяснял, как нужно изменить какой-то раздражитель, чтобы человек заметил это изменение. Оказалось, отношение изменения величины раздражителя к его первоначальному значению есть величина постоянная: $\frac{\Delta I}{I}=k$, где I — мера раздражителя, ΔI — прирост раздражителя, а k — константа Вебера.

Константа Вебера зависит от того, какой рецептор раздражается. Например, при восприятии веса $k=1/30$. Это значит, что, когда человек держит груз в 100 г, он замечает его изменение при увеличении веса на 3,4 г, а для груза в 200 г требуется прибавка в 6,7 г. Для высоты звука константа Вебера равна 0,003, для громкости звука — 0,09 и т. д.

Исходя из экспериментов Вебера, другой немецкий физиолог и психолог

*) Кстати, у мечехвоста нет зрачка, и, значит, нет диафрагмы. Впрочем, даже учет эффекта диафрагмы не спасает положения, изменяя освещенность всего на 1—2 порядка.

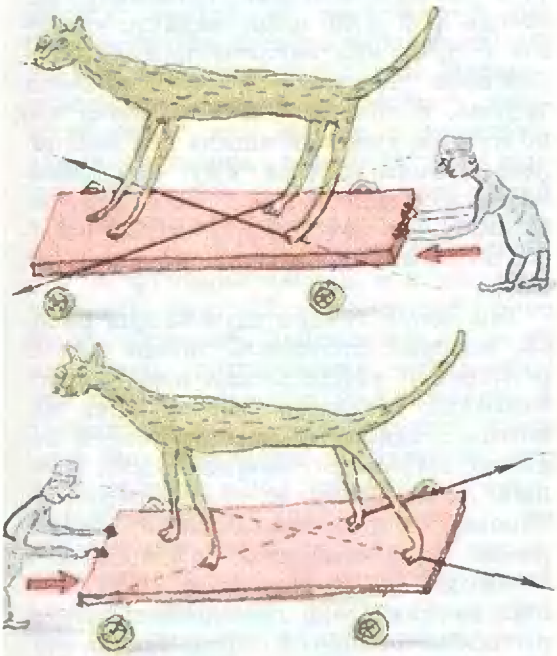
Г. Фехнер сформулировал знаменитый *закон Вебера — Фехнера:*

Ощущения растут в арифметической прогрессии, когда раздражение растет в геометрической прогрессии.

Этот закон был опубликован в книге Фехнера «Элементы психофизики» в 1859 году. Там же было приведено и математическое выражение закона:

$$E=a\log I+b,$$

где E — мера ощущения, a и b — константы, I — мера раздражения.



Зачем кошке векторы?

Слово «вектор», можно сказать, совсем «младенец» — по-видимому, оно появилось впервые в работе английского математика У. Гамильтона в 1845 году. Но соответствующее понятие использовалось в физике еще за несколько столетий до этого в связи с рассмотрением закона сложения сил («правила параллелограмма»). Про векторы же в организме животных мы узнали только в самые последние годы.

Началось с кошек. В 1988 году канадский ученый Дж. Макферсон выполнила интересную работу. Она ставила кошку на специальную платформу, толкала эту платформу в каком-нибудь направлении и смотрела, каким образом кошка сохраняет равновесие. Допустим, она толкнула платформу вперед. Ноги кошки вместе с платформой стали уходить вперед, а тело остается на месте. Тогда кошка, чтобы возвратить центр тяжести в правильное положение над точками опоры активирует мышцы лап и, отталкиваясь от платформы, двигает тело вперед. Если платформу толкнуть вправо, центр тяжести отклонится влево по отношению к опоре и лапы должны создать силу, направленную вправо, и т. д.

Как же происходит эта работа лап при сохранении равновесия?

Самое естественное — это предположить, что каждая из двух задних лап*) при толчке вперед создает силу, направленную вперед; сумма этих двух сил и восстанавливает правильное положение тела (рис. 2, *а*). Если платформу токнули вправо, каждая лапа создает силу, направленную вправо, и т. д. Такая гипотеза согласуется с тем, что у кошки есть мощные мышцы, которые двигают лапу вперед или назад — они используются для ходьбы и прыжков, а также мышцы, отводящие лапу наружу или по направлению к оси тела. Однако, когда Макферсон стала выяснять, что происходит на самом деле, оказалось, что картина совершенно другая: при толчке платформы, независимо от направления движения, задние лапы кошки создают силы, направленные вдоль двух прямых (каждая лапа — вдоль своей), расположенных примерно под углом 45° к оси тела. Даже в простейшем случае, когда платформу толкают прямо вперед, силы, создаваемые лапами, направлены не вперед, а тоже под углом 45° к оси тела (снова см. рис. 2, *а*). И только их сумма имеет нужное направление и величину. На рисунке 2, *б* показано, как

*) Выяснилось, что при восстановлении положения центра тяжести у кошки передние лапы используются как пассивные подпорки. Активно работают именно задние лапы.

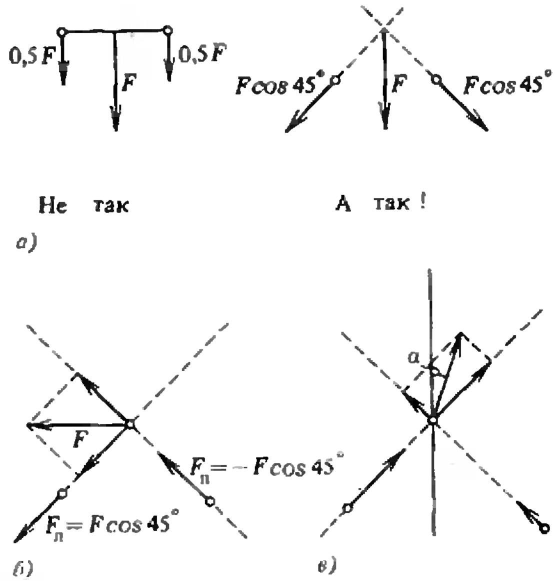


Рис. 2.

получается сила, направленная перпендикулярно телу, а на рисунке 2, *в* — сила, направленная под углом 30 ° к оси тела.

Значит, нервная система кошки решает следующую задачу. При толчке платформы по информации, полученной от разных рецепторов, определяется, какой вектор (силу) нужно получить, затем этот вектор раскладывается по фиксированным осям координат. При таком способе получается, что каждой из двух задних лап нужно передать всего одно число — координату вектора силы (положительную или отрицательную), которую должна создать эта лапа вдоль своей фиксированной оси.

Получается очень экономная схема. Но жизнь так полна неожиданностей! Разбираясь в том, какими мышцами создается это фиксированное направление (казалось бы, чего проще: использовать для единичного вектора одного направления мышцы, двигающие ногу вперед и внутрь, а для создания другого — назад и наружу, а дальше менять пропорционально силу, развиваемую этими мышцами,— «умножать на число», и все в порядке), Макферсон получила еще один неожиданный результат. Оказалось, что в создании «единичного» вектора могут участвовать разные мышцы, их сочетание меняется в зависимости от направления толчка. В чем смысл такого, с нашей точки зрения, усложненного решения, еще выяснять и выяснять. Однако здесь проявляется общий принцип живого: избегать жестких схем, иметь всегда избыток «степеней свободы», словом, плюрализм.

Векторы в мозгу обезьяны и человека

Трудности в выяснении вопроса о том, как на самом деле происходит решение той или иной задачи, связаны с тем, что заглянуть в «управляющий центр» — в мозг — очень трудно. В этом смысле мозг пока что во многом «черный ящик»: можно видеть, какая задача ему предложена, можно видеть, какой он выдает результат,— а вот что происходит внутри, об этом сведений еще очень и очень мало.

Тем более интересна и важна работа, которая позволила почти непосредственно увидеть, как идет работа мозговых нейронов при решении некоторых задач. Эту работу совсем недавно выполнил американский ученый А. Георгопулос. Он экспериментировал с дрессированными обезьянами. Лапа обезьяны помещалась в некоторой точке стола, а в различных точках стола помещались электрические лампочки. Обезьяну научили при вспышке какой-нибудь лампочки двигать лапу по направлению к этой лампочке. В это время экспериментатор регистрировал с помощью вживленных электродов активность (частоту импульсации) нервных клеток коры больших полушарий в той ее зоне, которая управляет движениями этой лапы.

Оказалось, что активность большинства клеток этой зоны мозга зависит от направления движения лапы; и эта зависимость достаточно четкая: для каждой из клеток существует такое направление движения, при котором активность максимальна; при других направлениях активность уменьшается примерно как косинус угла между данным направлением и направлением максимальной активности*). Для тех направлений, для которых косинус отрицателен, клетка вообще перестает импульсировать.

Получается, что с каждой клеткой коры связан определенный вектор максимальной активности A_{max} (рис. 3). Когда нужно двигать лапу по другому направлению, т. е. задан некоторый единичный вектор направления e, клетка находит проекцию A_{max} на это направление, т. е. «вычисляет» скалярное произведение $A_{max} \cdot e$. Выяснив это, Георгопулос поставил обратную задачу: нельзя ли, регистрируя работу нервных клеток, определить направление движения лапы. Математически эта задача может быть сформулирована как вопрос о существовании функции, обратной к заданной. Ясно, что по активности одной клетки направление движения определить нельзя: во-первых, косинус — функция четная, и в том промежутке, который нас интересует, не имеет обратной. Действительно, если, например, направление максимальной активности — это прямо вперед, а активность нейрона составляет половину максимальной, то известно, что лапа движется под углом 60° к преимущественному направлению, но вправо или влево от него — определить невозможно. Во-вторых, у одной клетки слишком велика «мертвая зона» — зона, когда она вообще молчит. Но если регистрировать несколько клеток, то можно успешно определить направление, в котором движется лапа (и даже предсказать, в каком направлении она будет двигаться, так как клетки начинают работать за десятую долю секунды до того, как лапа начинает двигаться). Представляем читателю самостоятельно решить такую задачу: какое минимальное число клеток требуется для того, чтобы уверенно определять направление движения во всех случаях? (Конечно, мы даем эту задачу, так сказать, в математической формулировке, которая, как всегда, упрощает ситуацию — как и мы ее упрощаем в нашем рассказе.)

То, что по активности нейронов можно не только установить, куда движется лапа, но и предсказать, куда обезьяна еще только собирается двигать ее, т. е. как бы подсмотреть мысль о движении, позволило Георгопулосу сделать еще одну, очень красивую работу.

Еще в 1971 году американские психологи Р. Шепард и Дж. Метцлер обнаружили явление, которое они назвали «мысленным вращением». В экспериментах испытуемым показывали две фигуры и спрашивали: это разные фигуры или одна и та же, но повернутая на некоторый угол? Время ответа оказалось линейной функцией величины угла поворота одной фигуры относительно другой.

В другом варианте эксперимента попеременно показывали букву R или ее зеркальное отражение — букву Я; надо быстро определить, какая это буква. При этом букву показывали в разных положениях. И здесь время ответа было пропорционально углу поворота буквы относительно «нормального» положения.

Ученые предположили, что чело-

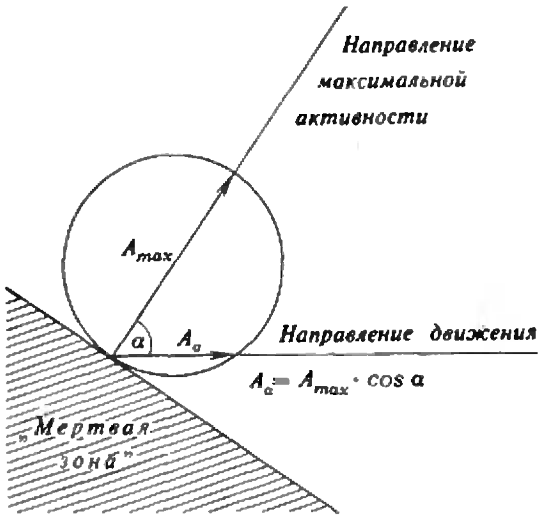


Рис. 3.

*) Пропорциональность частоты работы нервных клеток косинусу того или иного угла была известна и до работы Георгопулоса. Например, еще в 1981 году в стволе мозга были обнаружены нейроны, связанные со «скачками» глаз: их активность менялась в зависимости от направления скачка глаза по закону косинуса.

век в таком эксперименте мысленно вращает образ воспринимаемой фигуры (а по ряду психологических экспериментов, скорее, эталон фигуры, хранимый в памяти) с постоянной угловой скоростью и даже определили эту скорость. Получилось 450°/с. Однако такими экспериментами невозможно доказать гипотезу «мысленного вращения», так как остается неизвестным, что же происходит в действительности в головах испытуемых.

Георгопулос, обретя возможность «подглядывать» за работой нейронов мозга обезьяны, получил в 1989 году данные, которые делают гипотезу о мысленном вращении более обоснованной.

Теперь обезьяну научили тянуть лапу не к той лампочке, которая горит, а к той, которая находится под углом 90° к ней. Экспериментаторы смогли узнать, что происходит в мозгу обезьяны от момента, когда зажглась лампа, до начала движения лапы. Оказалось, что после вспышки вектор направлен прямо на лампочку, затем начинает вращаться и, когда повернется на 90°, начинается движение лапы. Скорость вращения вектора оказалась равной примерно 730°/с, т. е. была того же порядка, что и в психологических опытах с человеком.

Таким образом, как показывают эти эксперименты, мозг может производить и геометрические преобразования (на самом деле, не только повороты, но, видимо, и многие другие, например преобразования подобия).

Сделаем еще один намек на математические способности мозга. Сейчас бурно развивается параллельное программирование. Но когда человек берет предмет, он одновременно управляет работой и плеча, и локтя, и пальцев, осуществляя самое настоящее параллельное программирование.

Заключение

Итак, в живых организмах идут процессы переработки, передачи информации и использование ее в целях управления. Эволюция постепенно находит удачные формы обработки информации, и эти формы имеют немалое сходство с математическими операциями. Такие ухищрения эволюции мы и назвали «математикой в живых организмах».

Дама с Собачкой

(Начало см. на с. 10)

Некоторые сведения из истории комплексных чисел

1545 год. Д. Кардано (Италия) публикует книгу «Великое искусство, или О правилах алгебры», где вводит мнимые величины.

1629 год. А. Жирар (Голландия) публикует книгу «Новые открытия в алгебре», где формулирует основную теорему алгебры.

1707 год. А. де Муавр (Англия) вводит правила возведения в степень и извлечения корня из комплексных чисел (формулы Муавра).

1746 год. Д Аламбер (Франция) публикует первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы алгебры.

1770-е годы. Л. Эйлер (Россия) вводит понятие функции комплексной переменной.

1799 год. К. Гаусс (Германия) публикует первое строгое доказательство основной теоремы алгебры.

1799 год. К. Вессель (Дания) впервые описывает геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

Литература

Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика.* М., Просвещение, 1968.

Маркушевич А. И. *Комплексные числа и конформные отображения.* М., 1979.

Яглом И. М. *Комплексные числа и их применение в геометрии.* М., 1963.

Книги из серии «Популярные лекции по математике» (издательство «Наука»):

Бакельман И. Я. *Инверсия* (вып. 44).

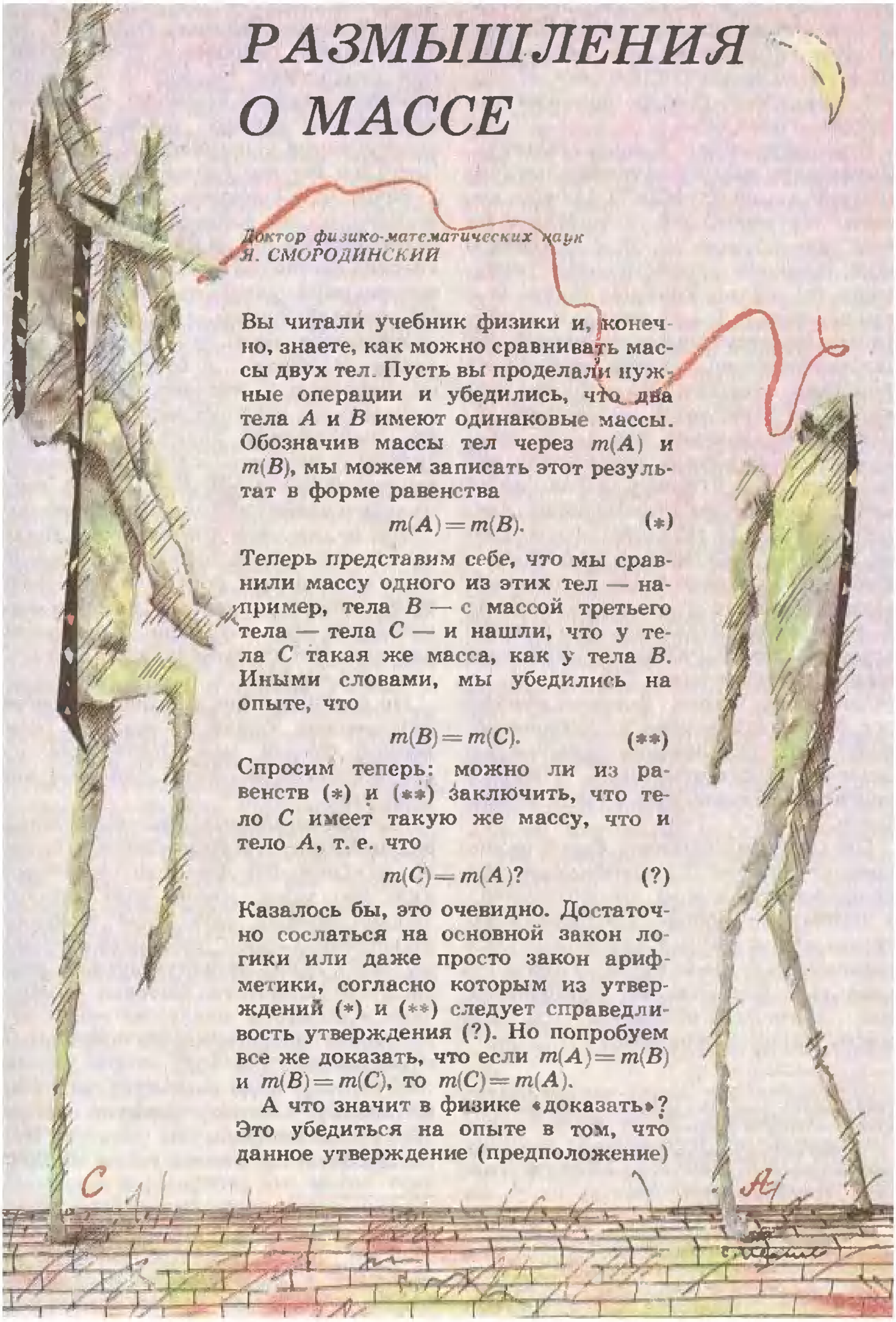
Маркушевич А. И. *Комплексные числа и конформные отображения* (вып. 13).

Шафаревич И. Р. *О решении уравнений высших степеней* (вып. 15).

Шерватов В. Г. *Гиперболические функции* (вып. 16).

РАЗМЫШЛЕНИЯ О МАССЕ

Доктор физико-математических наук
Я. СМОРОДИНСКИЙ



Вы читали учебник физики и, конечно, знаете, как можно сравнивать массы двух тел. Пусть вы проделали нужные операции и убедились, что два тела A и B имеют одинаковые массы. Обозначив массы тел через $m(A)$ и $m(B)$, мы можем записать этот результат в форме равенства

$$m(A)=m(B). \qquad (*)$$

Теперь представим себе, что мы сравнили массу одного из этих тел — например, тела B — с массой третьего тела — тела C — и нашли, что у тела C такая же масса, как у тела B. Иными словами, мы убедились на опыте, что

$$m(B)=m(C). \qquad (**)$$

Спросим теперь: можно ли из равенств (*) и (**) заключить, что тело C имеет такую же массу, что и тело A, т. е. что

$$m(C)=m(A)? \qquad (?)$$

Казалось бы, это очевидно. Достаточно сослаться на основной закон логики или даже просто закон арифметики, согласно которым из утверждений (*) и (**) следует справедливость утверждения (?). Но попробуем все же доказать, что если $m(A)=m(B)$ и $m(B)=m(C)$, то $m(C)=m(A)$.

А что значит в физике «доказать»? Это убедиться на опыте в том, что данное утверждение (предположение) не противоречит никаким известным (доказанным, проверенным опытом) законам. При этом надо соблюдать определенные «правила игры». И первое правило — нельзя пользоваться словом «очевидно».

Итак, приступим к доказательству. Произведем мысленно такой опыт (его обсуждал еще Э. Мах*)). Согнем колечко из проволоки и насадим на него три шарика A, B и C. Массы этих шариков удовлетворяют равенствам (*) и (**). Толкнем теперь шарик A, сообщив ему скорость $\vec{u}$. Если трение отсутствует, то шарик будет двигаться по колечку, не изменяя величины скорости (по модулю), пока он не столкнется с шариком B. После столкновения шарик A остановится, а B начнет двигаться с той же скоростью u (опять же по модулю), с которой до столкновения двигался шарик A. (Если бы мы не знали заранее, что массы A и B одинаковые, то можно было бы об этом узнать, сравнив скорости A и B до и после столкновения — это вполне хороший способ, или же проверив, что шарик A остановился.**))

Двигаясь, шарик B через некоторое время столкнется с шариком C. Результат столкновения также предсказуем: B остановится, а C начнет двигаться со скоростью u (ведь $m(B)=m(C)$).

Следующим событием будет столкновение шарика C с шариком A. Мы не проверили опытом, что $m(C)=m(A)$, а потому не можем утверждать заранее, что A начнет двигаться с той же скоростью u, с которой он двигался сначала. Для такого заключения мы должны привлечь на помощь закон сохранения энергии.*) Если бы скорость шарика A после столкновения оказалась больше u, то эту бо́льшую скорость A сообщил бы при соударении шарику B и таким способом можно было бы получать энергию из ничего: после каждого столкновения с шариком C шарик A двигался бы все быстрее и быстрее!

Если бы скорость A оказалась меньше u, то шарики со временем остановились бы и их кинетическая энергия бесследно исчезла (напомним, что шарики двигаются без трения). Оба вывода ложны, а следовательно, утверждение о том, что после столкновения с C шарик A будет двигаться со скоростью u, истинно.

Теперь все стало на свои места. Чтобы выполнялся закон сохранения энергии, скорость шарика A после столкновений $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$ вернулась к своему исходному значению.

Мы видим, что для строгого доказательства почти очевидного равенства масс одной логики не хватает, необходимо привлечь на помощь физический закон — закон сохранения энергии. Без этого нельзя заключить, что $m(C)=m(A)$!

Но для практических целей строгое определение нужно не везде. В обыденной жизни нам достаточно не столь строгое, но более понятное определение.

Ньютон на первых страницах своей великой книги «Математические начала натуральной философии» объяснял, что такое масса, так: «Количество материи есть мера таковой, пропорциональная плотности и объему ее»*). Если, не задумываясь, считать, что количество материи обозначает у Ньютона массу, то такое определение представляется лишенным содержания: для того чтобы узнать плотность ρ, надо разделить массу m на объем V, и потому формула $m=\rho V$ есть следствие формулы $\rho=m/V$! Надо сказать, что многие так и воспри-

*) Эрнст Мах (1838—1916) — крупный австрийский физик и философ-идеалист. Занимался механикой, акустикой, оптикой.

**) Эти утверждения не очевидны. Их можно оправдать ссылкой на то, что шарики A и B одинаковы. Но не будем придираться!

***) Надо признаться, что закон сохранения энергии (или импульса) мы молчаливо использовали раньше, когда утверждали, что шарики A и B поменялись ролями после столкновения: A остановился, а B «принял на себя» скорость A. Хотя это и «очевидно», но без законов сохранения доказать нельзя. (Остерегайтесь слова «очевидно»!)

*) Поскольку почти всегда это определение дается с ошибками, приведем его на том языке, на котором писал Ньютон — на доброй латыни (латыни ведь сейчас учат в гимназиях): "*Definitio I.* Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim".

нимали сказанное Ньютоном. И это было ошибкой. Надо понять смысл того, что писал Ньютон, а не обвинять его в тривиальной нелогичности. Определяя массу до введения понятия импульса, не зная о существовании закона сохранения энергии (само понятие «энергия» появилось спустя сто с лишним лет), Ньютон оказался в трудном положении. И он нашел единственный выход, придумав свое Definitio.

Сам Ньютон слово масса не употреблял и вкладывал в свое определение другой смысл. В 17—18 веках считалось, что все тела состоят из одинаковых очень маленьких частиц — их называли монадами. Монады все были одинаковыми, а разные тела отличались друг от друга только тем, что монады в них упакованы с разной плотностью. Как выглядят монады, какие у них свойства — узнать из опытов нельзя; но ученых в то время не очень волновали опыты, они считали, что законы природы можно открыть одними рассуждениями. Теорией монад занимались Лейбниц, Эйлер и другие ученые.

Крупным специалистом по монадам считался немецкий философ Христиан Вольф, популяризатор идей Лейбница. По учебникам Вольфа училась почти вся Европа. Ломоносов перевел один из учебников Вольфа, и это был первый учебник физики в России. Тогда о монадах все знали и, говорят, даже придворные дамы при Прусском дворе любили о них рассуждать. Поэтому для читателя 18 века определение Ньютона было исполнено смысла.

Теория монад, конечно, давно ушла из науки. В 19 веке уже говорили об атомах с разными химическими и физическими свойствами, но, как это ни удивительно, в нашем 20 веке полезно вернуться к идее Ньютона и говорить, что масса тела пропорциональна количеству нуклонов — нейтронов и протонов, в нем содержащихся,— или даже пропорциональна объему тела и «нуклонной плотности» — среднему числу нуклонов в 1 $см^3$.

Какие возражения может вызывать такое определение? Масса нейтрона больше, чем масса протона, примерно на 0,2 %. Можно, конечно, учесть это различие, считая нейтроны и протоны отдельно; но, с другой стороны, ошибка в десятые доли процента нас во многих случаях не беспокоит (по крайней мере, при решении школьных задач).

Более принципиальная ошибка связана с тем, что нуклоны в ядрах «легче» нуклонов в свободном состоянии. Дело в том, что энергия связанной системы частиц (ядра атома) меньше суммарной энергии этих частиц в свободном состоянии. Чтобы разделить ядро на составляющие его нуклоны, нужно затратить энергию, равную разности этих энергий (ее называют энергией связи). А поскольку между энергией и массой существует связь, выражаемая формулой Эйнштейна — $E = mc^2$, — разность энергий означает разность масс. Значит, масса атомного ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов. Это уменьшение массы достаточно велико и составляет почти 1 % (точнее, 0,6—0,8 %).

Мы знаем, что атомная масса водорода*) равна 1,0078 атомных единиц массы, а масса атома основного изотопа урана равна 238 а. е. м., т. е. меньше, чем сумма масс 92 протонов и 146 нейтронов, из которых состоит ядро этого изотопа. Можно сделать поправку на «энергию связи», но не стоит усложнять задачу.

Итак, определение Ньютона — отнюдь не «пустое». Правильно понятое, оно определяет массу с ошибкой меньше процента.

Но мы еще не кончили наш рассказ.

Масса, о которой мы говорим, измеряется не в килограммах и не в граммах — единицей измерения служит атомная единица массы (напомню, что а. е. м. определяется как 1/12 массы атома углерода ^{12}C). Перевести атомные единицы массы в ки-

*) Это масса нейтрального атома водорода (протон + электрон). Пользуясь атомной массой, не надо делать поправку на массу электрона.

лограммы оказалось не так легко, хотя никаких фундаментальных трудностей в этой части задачи, конечно, нет. Идея измерения самая простая — надо поделить массу (в килограммах) образца элемента на число атомов в этом образце. Трудности и состоят в том, что надо «поштучно» пересчитать атомы. Такая точность сегодня необходима и физикам, и химикам.

Мы не будем подробно рассказывать о хитроумных опытах, в которых производились подсчеты. Скажем только, что для этого изготовили очень хороший кристалл, измерили очень точно его размеры, потом с помощью рентгеновского анализа определили расстояние между атомами... Каждая операция потребовала большой изобретательности — ведь речь шла об очень большой точности.

В проблеме массы это была самая трудная часть.

Еще одно замечание в заключение.

В популярных книжках, да и в учебниках бытует понятие, от которого давно пора отказаться. От него пользы нет никакой, и живет оно только по старой привычке. Понятие это — масса движущегося тела, которая растет со скоростью. В действительности массу движущегося тела никто не измеряет, измеряют его энергию (например, энергию протона в ускорителе). Массу же вычисляют по формуле $m = E/c^2$. Физики давно такую массу не используют и ведут все вычисления только с энергией. Массой же теперь называют только «массу покоя» — массу покоящейся частицы. И в таблицах элементарных частиц собраны значения именно масс покоя (хотя слово «покоя» и опущено).

Постарайтесь забыть, что «масса растет со скоростью», — эта фраза сейчас имеет мало смысла. Со скоростью увеличивается энергия.

Нам пишут

Считаем в двоичной системе

Пусть перед нами расположены несколько предметов и нам нужно сосчитать их. Как обычно, мы делаем это *последовательным пересчетом:* берем первый предмет и говорим «один», берем следующий — «два», следующий — «три» и так далее до последнего. Поскольку считаем мы в *десятичной системе,* то и число предметов N получим в десятичной системе

$$N = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0.$$

Здесь каждая цифра a_i — это 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9 и

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

А теперь представим себе, что при счете мы пользуемся исключительно *двоичной системой* (в наше время, время всеобщей компьютеризации, это, наверное, не так уж и трудно себе представить).

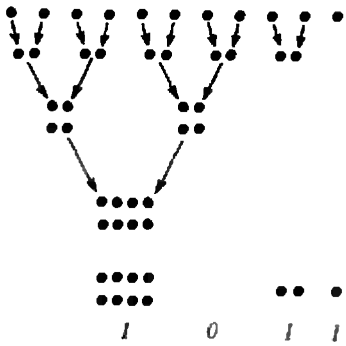
В этой системе число N представляется в виде

$$N = b_l b_{l-1} \ldots b_1 b_0,$$

где каждая цифра b_i либо 0, *либо* 1 и

$$N = b_l \cdot 2^l + b_{l-1} \cdot 2^{l-1} + \ldots + b_1 \cdot 2 + b_0.$$

Для подсчета числа предметов в двоичной системе мы можем использовать тот же самый последовательный пересчет: последовательно по одному перебирать предметы и последовательно называть числа в двоичной системе.



1 0 1 1

Однако в двоичной системе существует принципиально иной метод счета, с которым я и хочу вас познакомить. Обратимся к рисунку: сгруппируем все предметы по парам. При этом либо ничего не останется, *либо* останется один непарный предмет. Скажем так: останется либо 0 предметов, либо 1 предмет. На втором этапе каждые две пары объединим в четверки. При этом опять останется либо 0 пар, либо 1 пара. Дальше объединим попарно четверки, затем восьмерки и так далее. После последнего объединения мы получаем разбиение всех предметов на группы, и число элементов в каждой группе есть степень двойки. Если в разбиении присутствует группа с 2^i элементами, то положим $b_i = 1$, если такая группа отсутствует — $b_i = 0$. И тогда

$$N = b_l b_{l-1} \ldots b_1 b_0$$

— запись числа предметов в двоичной системе.

Какой же из этих двух способов предпочтительнее? Предлагаю вам решить этот вопрос самостоятельно.

А. Панов

Задачник „Кванта”

Задачи

М1206—М1210, Ф1213—Ф1217

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1206» или «Ф1213». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1206. В круге проведены два перпендикулярные друг другу диаметра AE и BF. На дуге EF взята точка C. Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE соответственно в точках P и Q (рис. 1). Докажите, что площадь четырехугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга.

А. Костенков

М1207. Докажите, что для любых x, y и любого натурального m выполняется неравенство

$$(x^2+y^2)^m \geqslant 2^m x^m y^m + (x^m - y^m)^2.$$

Ш. Рагимов

М1208. Последовательность чисел h_n задана условиями:

$$h_1 = \frac{1}{2} \text{ и } h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$$

для каждого n. Докажите, что сумма любого количества чисел h_n не превосходит 1,03.

Д. Акулич

М1209*. Числовой треугольник, первая строка которого состоит из N единиц, вторая — из $N-1$ целых чисел, образуется по следующему правилу: для любых четырех чисел a, b, c, d, стоящих в вершинах ромбика (a и c — соседние числа в строке, рис. 2), выполняется равенство $ac = bd + 1$. Докажите, что

а) если все числа в треугольнике отличны от 0, то все они целые;

б) если все числа в треугольнике натуральные, то в нем встречается не менее $N/4$ различных чисел.

Д. Фомин

М1210*. Имеется кучка из M спичек и лист бумаги, на котором написано число M. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок берет из кучки или возвращает в кучку от 1 до k спичек и записывает на листе, сколько спичек стало в кучке. (Вначале все имеющиеся спички лежат в кучке — у игроков спичек нет.) Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход или вынужден записать число, уже имевшееся на листе ранее. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если а) $k=2$; б) $k=5$?

К. Кохась

Ф1213. Однородная нерастяжимая веревка подвешена за концы в точках A и B, находящихся на разной высоте (рис. 3). Натяжение веревки в точке A равно T_A. Найти натяжение веревки в точке B, если она находится на h выше точки A. Масса веревки m, длина l.

Е. Татаринова

Ф1214. Вдогонку снаряду, выпущенному горизонтально с горы высотой $h = 1$ км со скоростью $v_0 = 500$ м/с, через время $t_0 = 1$ с выпущен второй снаряд. Какой минимальной начальной скоростью он должен обладать

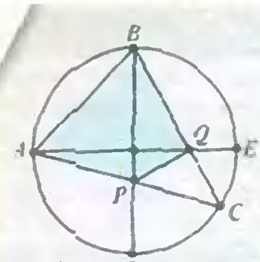


Рис. 1.

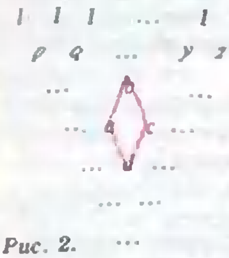


Рис. 2.

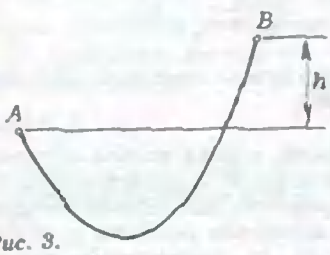


Рис. 3.

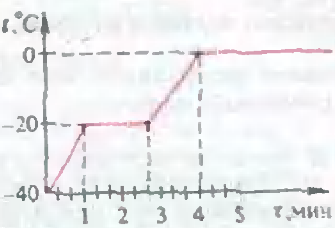


Рис. 4.

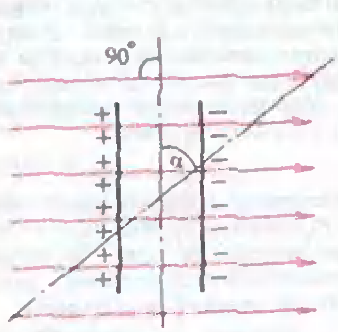


Рис. 5.

Задачник „Кванта"

и под каким углом вылететь, чтобы догнать первый снаряд?

В. Никифоров

Ф1215. В теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри помещены 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой. Сначала температура в сосуде была равна -40 °C, затем включили нагреватель, потребляющий постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 4. Удельная теплоемкость льда $c_л = 2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), твердого вещества — $c = 10^3$Дж/(кг · К). Найти удельную теплоту плавления вещества и его удельную теплоемкость в расплавленном состоянии.

А. Буздин

Ф1216. Плоский заряженный конденсатор внесли в область однородного электрического поля, напряженность которого направлена так, как показано на рисунке 5. Для этого необходимо было совершить работу A_1. Затем конденсатор повернули на угол α, совершив при этом работу A_2. Полагая заданным значение угла α, определить отношение работ A_2/A_1. Считать, что все собственное поле конденсатора однородно и сосредоточено внутри его объема.

В. Можаев

Ф1217*. В последнее время широкое распространение получила новая конструкция контактных линз. (Контактные линзы используются для коррекции зрения вместо очков. Они представляют собой очень тонкие пластинки, надеваемые непосредственно на глазное яблоко.) Фокусировка света такой линзой основана на его волновой природе. Для этого вокруг центральной круговой прозрачной области линзы наносятся концентрические кольца с чередующейся прозрачностью (непрозрачное — прозрачное — и т. д.).

а) Определить диаметр центральной прозрачной области.

б) Определить диаметры двух ближайших к центру линзы прозрачных колец при условии, что фокусное расстояние линзы равно $F = 25$ см.

в) Зная, что контактная линза дает четкое изображение в фокальной плоскости не только удаленных объектов, но также и точечного объекта, расположенного на конечном расстоянии от линзы, найти это расстояние.

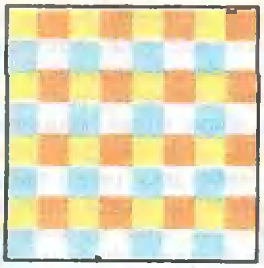
Считать для определенности, что длина световой волны равна $\lambda = 500$ нм, что линза плоская, очень тонкая, а кольца очень узкие.

Из задач Шведской национальной олимпиады школьников

Решения задач

М1181 — М1185, Ф1193 — Ф1197

М1181. *На шахматной доске расставлено 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток стоит по одной фигуре. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.*



Раскрасим поля доски, как показано на рисунке. Поскольку на каждой горизонтали стоит ровно одна фигура, на красных и желтых полях стоят 4 фигуры. Аналогично, на синих и желтых полях тоже стоят 4 фигуры. Поэтому фигур на красных полях столько же, сколько на синих, а общее их число четно. Но красные и синие поля — это и есть черные поля исходной шахматной раскраски.

В. Произволов

М1182. *В некоторой роще было $n \geqslant 3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из них жило по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие, так что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом, если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов оказалось больше расстояния между второй парой. При каких n это возможно?*

Ответ: при $n=3$.

Докажем, что любой скворец либо остается на месте, либо меняется местами с другим.

Пусть скворец из скворечника A_1 перелетел в A_2, из A_2 в A_3 и т. д. Число скворечников конечно, поэтому в последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots$ начнутся повторения, причем первым повторится A_1 (если вновь появилось, скажем, A_3, то непосредственно перед ним должно стоять A_2, а перед A_2 — A_1, т. е. A_1 вторично встречается раньше). Допустим, что $A_i \neq A_1$ при $1 < i \leqslant k$, $A_{k+1} = A_1$ и что наименьшее из расстояний $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_kA_1$ — это, например, A_1A_2. Из того, что A_1A_2 меньше всех остальных расстояний A_iA_{i+1}, по условию следует, что A_2A_3 — больше всех остальных расстояний A_iA_{i+1}, а отсюда — что A_3A_4 меньше всех остальных расстояний A_iA_{i+1}, т. е. $A_3A_4 = A_1A_2$. Но все расстояния A_iA_j различны, следовательно, $A_3 = A_1$. Другими словами, если уж скворец покинул скворечник A_1, то он меняется местами со скворцом из A_2.

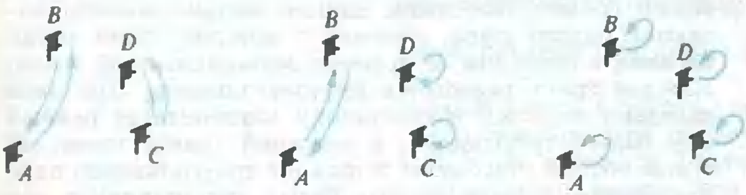


Рис. 1.

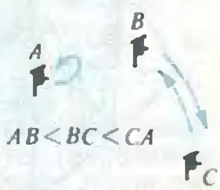


Рис. 2.

Если $n \geqslant 4$, то, очевидно, можно выбрать 4 скворечника, перелеты между которыми устроены одним из способов, показанных на рисунке 1. В любом случае расстояния между скворцами A и B, C и D после перелета не меняются, в то время как по условию меньшее расстояние должно стать большим.

Для случая $n=3$ пример приведен на рисунке 2.

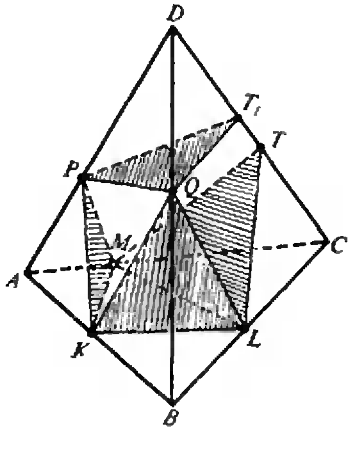
А. Берзиньш, В. Дубровский

М1183. *Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встречались одновременно трое мальчиков.*

Пусть утверждение задачи неверно и пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — непересекающиеся промежутки времени, в течение которых около киоска находились двое мальчиков. В начальный момент каждого из промежутков $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ к киоску подходил по крайней мере один мальчик, в начальный момент промежутка Δ_1 — либо один (если около киоска уже был мальчик), либо двое (если около киоска никого из мальчиков не было). Следовательно, общее число s приходов к киоску всех семи мальчиков не меньше $n+1$. Так как всего из 7 мальчиков можно образовать $7\cdot 6/2=21$ различную пару, а по условию каждые двое мальчиков встречались у киоска, $n \geqslant 21$. Следовательно, $s \geqslant 22$. С другой стороны, $s=7\cdot 3=21$. Противоречие.

А. Анджанс

М1184. *На всех ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах, выходящих из одной вершины, проведем плоскость. Докажите, что если три из них касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость касается вписанного шара.*



Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ и возьмем на его ребрах точки K, L, M, P, Q, T, как показано на рисунке. Пусть плоскости KMP, MLT и LKQ касаются вписанного в тетраэдр шара, а плоскость PTQ этого шара не касается. Пусть, для определенности, вписанный шар пересекает плоскость PTQ. Проведем через PQ плоскость, касающуюся вписанного шара и обозначим через T_1 точку пересечения этой плоскости с ребром DC.

Рассмотрим выпуклый многогранник (восьмигранник) $KMLPQTT_1$. Для удобства окрасим грани KMP, MLT, LKM и PQT_1 в черный цвет, а остальные грани пусть останутся белыми. В черный цвет окрашены грани, не принадлежащие поверхности тетраэдра $ABCD$, белыми являются грани, принадлежащие поверхности $ABCD$. Заметим, что ни одна пара черных граней не имеет общего ребра. Что же касается белых граней, то есть одно исключение: ребро T_1T является общим для двух белых граней. Все грани нашего восьмигранника касаются одного шара. Возьмем в каждой грани точку касания и соединим ее со всеми вершинами этой грани. Каждая грань разобьется на треугольники. При этом каждому черному треугольнику соответствует равный ему белый треугольник в смежной грани, имеющий с ним общую сторону. У белых же треугольников одно исключение — пара равных белых треугольников при ребре T_1T.

Рассмотрим сумму углов получившихся черных треугольников вокруг точек касания. Эта сумма равна $4 \cdot 2\pi = 8\pi$. Поскольку каждому черному треугольнику соответствует равный ему белый треугольник, то аналогичная сумма для белых треугольников равна $8\pi + 2\varepsilon$, где ε — угол, под которым видно из точки касания ребро T_1T. (Если вписанный шар не пересекает плоскость PTQ, то эта сумма равна $8\pi - 2\varepsilon$.) Но, с другой стороны, сумма углов белых треугольников вокруг точек касания также равна $4 \cdot 2\pi = 8\pi$. Следовательно, $\varepsilon = 0$, т. е. точка T_1 совпадает с T. Утверждение доказано.

Другое доказательство можно получить, опираясь на такую лемму. В выпуклый четырехгранный угол с плоскими углами α, β, γ, δ можно вписать шар тогда и только тогда, когда суммы пар противоположных плоских углов равны: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$; если же $\alpha + \gamma < \beta + \delta$, то шар, касающийся плоскостей углов β, γ и δ, пересекает плоскость α.

И. Шарыгин

М1185. *Найдите положительные числа x_1, x_2, ..., x_n, удовлетворяющие системе n уравнений $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)(x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n) = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, если а) $n = 3$; б) $n = 4$; в)* $n = 10$. г)* Докажите, что эта система при любом n имеет единственное решение (в положительных числах).*

Начнем с двух замечаний, относящихся к произвольному n (напомним, что все x_k положительны).

1) Положим $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$. Задав s, мы из данных уравнений можем выразить $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$s_1 = x_1 = \frac{1}{s},$$

$$s_2 = x_1 + x_2 = \frac{1}{s - s_1},$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{s - s_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = \frac{1}{s - s_{n-1}}; \quad s_n = s.$$

Отсюда видно, что равенства могут выполняться лишь при одном значении s. Действительно, пусть при некотором s они верны. Если s увеличить, то s_1, s_2, ..., s_n уменьшатся (и наоборот); при этом последнее равенство будет нарушено.

На рисунке 1 показано, как можно при выбранном s построить точки s_1, s_2, s_3, ..., для которых $s_{k+1} = \frac{1}{s - s_k}$ ($s_0 = 0$, $s_1 = 1/s$, ...): для этого достаточно нарисовать (красную) «лестницу» — ломаную, вершины которой попеременно лежат на гиперболе $y = \frac{1}{s - x}$ и на прямой $y = x$, а звенья параллельны осям.

Заметим, что при непрерывном изменении s гипербола и все вершины ломаной сдвигаются непрерывно; отсюда легко видеть, что при некотором s решение существует (оно соответствует случаю, когда s_n

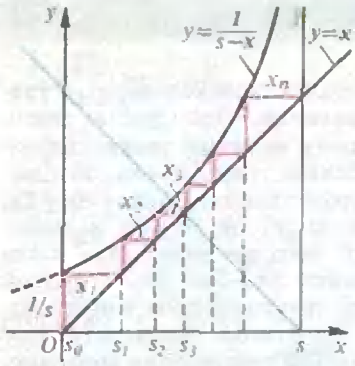


Рис. 1.

Задачник „Кванта"

совпадает с s; на нашем рисунке это произошло при $n=5$.

2) Из данных уравнений сразу следует, что $x_1=x_n$, $x_2=x_{n-1}$, $x_3=x_{n-2}$, ...: в самом деле, из первого и последнего видно, что $x_1=x_n=1/s$, из второго и предпоследнего — что $x_1+x_2=1/(s-x_1)=1/(s-x_n)=$ $=x_{n-1}+x_n$, т. е. $x_2=x_{n-1}$, и т. д. Эта симметрия сразу видна и из рисунка 1, поскольку гипербола симметрична относительно голубой биссектрисы $y=$ $=s-x$.

Второе замечание позволяет коротко записать решение для небольших n.

а) $n=3$. Тогда $s=2x_1+x_2=x_1+s_1$. Из уравнений $x_1(x_1+s_1)=1$, $s_1^2=1$ находим $s_1=1$, $x_1^2+x_1-1=0$, откуда (поскольку $x_1>0$)

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_2=1-x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ x_3=x_1.$$

б) $n=4$. Тогда $s=2x_1+2x_2=2s_1$. Из уравнений $2x_1s_1=1$, $s_1(2s_1-x_1)=1$ находим $2s_1^2=1+x_1s_1=3/2$, $s_1=\sqrt{3}/2$, откуда

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6},\ x_3=x_2,\ x_4=x_1.$$

Заметим, что в случае $n=2$ ответ находится *сразу:*

$$2x_1^2=1,\ x_1=x_2=\sqrt{2}/2.$$

Знатока геометрии эти числа наведут на мысль, что случаи $n=2$, $n=3$ и $n=4$ как-то связаны с углами соответственно *45°, 36° и 30°*. В самом деле, мы увидим (см. рисунок 2), что для любого n существует решение системы, связанное с углом $\alpha=180°/(n+2)$. Из первого замечания следует, что это решение единственно.

Построим равнобедренный треугольник A_0OA_n с боковыми сторонами $A_0O=OA_n=1$ и углами $\alpha=180°/(n+2)$ при основании; на основании A_0A_n отметим точки $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ так, что отрезки $A_0A_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ видны из вершины O под равными углами α. Докажем, что длины этих отрезков $x_1, x_2, ..., x_n$ удовлетворяют нашей системе. Удобно провести через точку O еще луч OP, параллельный A_0A_n ($\angle POA_0=\alpha$). Треугольники A_0OA_k и $A_nA_{k-1}O$ подобны ($\angle A_0=\angle A_n=\alpha$, $\angle A_0OA_k=k\alpha=\angle POA_{k-1}=\angle OA_{k-1}A_n$), причем сторонам $A_0O=1$ и $A_0A_k=x_1+...+x_k$ первого соответствуют стороны $A_{k-1}A_n=x_k+...+x_n$ и $OA_n=1$ *второго, откуда* получаем нужное уравнение

$$(x_1+...+x_k)(x_k+...+x_n)=1.$$

Итак, существование решения доказано. Пользуясь *теоремой синусов, легко получить явные формулы:* поскольку $OA_0=1$,

$$\angle A_0OA_k=k\alpha,\ \angle A_0A_kO=180°-\angle POA_k=180°-$$
$$-(k+1)\alpha,$$

из $\Delta OA_{k-1}A_k$ и ΔOA_0A_k получаем

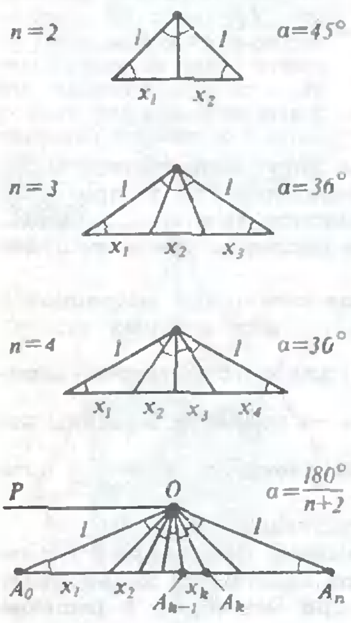


Рис. 2.

$x_1 = x_{10} = \sqrt{6}/2 - \sqrt{2}/2,$
$x_2 = x_9 = \sqrt{2} - \sqrt{6}/2,$
$x_3 = x_8 = \sqrt{6}/3 - \sqrt{2}/2,$
$x_4 = x_7 = 3\sqrt{2}/2 - 5\sqrt{6}/6,$
$x_5 = x_6 = 3\sqrt{6}/4 - 5\sqrt{2}/4.$

$$\frac{x_k}{\sin\alpha} = \frac{OA_k}{\sin k\alpha},\ \frac{OA_k}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(k+1)\alpha},$$

откуда:

$$x_k = \frac{\sin^2\alpha}{\sin k\alpha \sin(k+1)\alpha}\ \left(k=1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \frac{\pi}{n+2}\right).$$

В частности, для $n=10$ имеем $\alpha = \frac{\pi}{12}$; при этом числа $\sin k\alpha$ для $k=1, 2, \ldots, 6$ равны соответственно $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$, 1 (и разумеется, $\sin(12-k)\alpha = \sin k\alpha$). Подставляя эти значения в общую формулу, получаем ответ, указанный на полях.

Н. Васильев, В. Протасов

Ф1193. *В пространстве движется кубик. В данный момент грань ABCD горизонтальна (рис. 1), а скорости точек A и B направлены вертикально вниз и равны по модулю v. Известно, что скорость точки C в этот же момент равна по модулю 2v. Какую максимальную скорость могут иметь в этот момент другие точки кубика?*

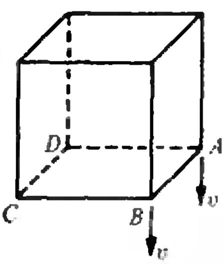


Рис. 1.

Представим движение кубика в любой момент времени как сумму поступательного движения со скоростью v вместе с прямой AB и вращательного движения относительно этой прямой. При этом, очевидно, скорости всех точек кубика, лежащих на произвольной прямой, параллельной AB, будут одинаковыми. Например, скорости всех точек ребра CD в данный момент времени равны по модулю $2v$. Таким образом, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно рассмотреть движение одной грани кубика, например $BCEF$ (рис. 2), и найти на ней точки, скорости которых максимальны.

Рассмотрим точку C. Легко сообразить, что в данный момент вектор скорости этой точки вертикален (это следует из того, что как поступательная, так и вращательная составляющие скорости точки C вертикальны). При этом вектор скорости точки C может быть направлен как вверх — случай а), так и вниз — случай б).

Начнем со случая а). Очевидно, на прямой BC найдется такая точка, скорость которой в данный момент равна нулю. Действительно, если поступательная составляющая скорости всех точек кубика равна v и направлена вниз, то вращательная составляющая точки C равна $3v$ и направлена вертикально вверх. Тогда на расстоянии $a/3$ от точки B, где a — длина ребра кубика, будет находиться точка O, вращательная составляющая скорости которой равна v и направлена вверх. Следовательно, полная скорость точки O в данный момент равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром вращения*. Но если точка O в данный момент неподвижна, то максимальную скорость будет иметь точка, максимально удаленная от точки O. Очевидно, что этому условию удовлетворяет точка E. Так как

$$\frac{v_E}{v_C} = \frac{OE}{OC} \text{ и } OE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}a,$$

получаем

$$v_E = v_C\frac{OE}{OC} = v\sqrt{13} \approx 3{,}6v.$$

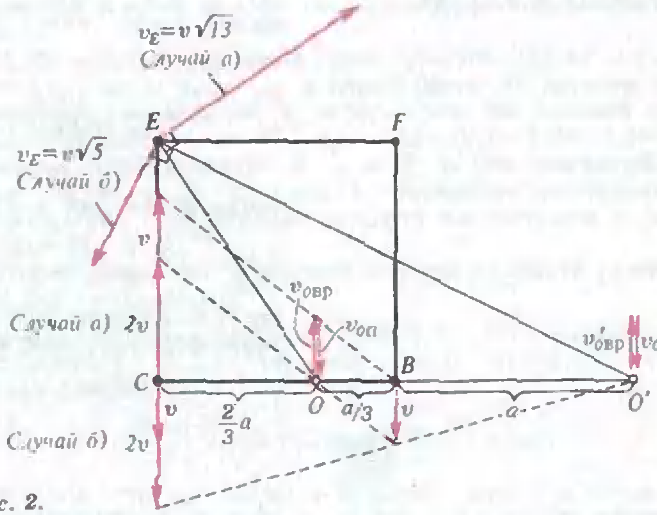


Рис. 2.

В случае б) мгновенный центр вращения грани $BCEF$ — точка O' (см. рис. 2) — лежит вне ребра BC на расстоянии $BO' = a$ справа от точки B. Максимальную же скорость опять будет иметь точка E, причем

$$v_E = v_C \frac{O'E}{O'C} = 2v \frac{\sqrt{a^2 + (2a)^2}}{2a} = v\sqrt{5} \approx 2{,}2v.$$

Итак, для обоих возможных направлений вектора скорости точки C *максимальное значение* скорости будут иметь точки кубика, лежащие на ребре, которое параллельно прямой AB и проходит через вершину E.

С. Кротов

Ф1194. *Капилляр сделан из двух тонких стеклянных трубочек с внутренними диаметрами d_1 и d_2 (см. рисунок). В него ввели большую каплю воды массой M. Когда капилляр расположили горизонтально, вся капля «уползла» в тонкую часть, а когда его установили вертикально — вся вода из него вытекла. При каких углах между осью капилляра и вертикалью капля будет располагаться частично в толстой, а частично в тонкой трубочке? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, плотность воды ρ. Смачивание считать полным.*

Максимальное значение угла между осью капилляра и вертикалью соответствует случаю, когда практически вся капля воды оказывается в тонкой части капилляра. При этом длина столба воды

$$l_{max} = \frac{M}{\rho\pi d_2^2/4},$$

а его высота

$$h_{max} = l_{max} \cos\alpha_{max}.$$

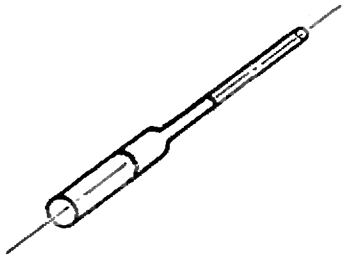
Тогда условием равновесия будет равенство

$$p_{атм} - \frac{4\sigma}{d_1} = p_{атм} - \frac{4\sigma}{d_2} + \rho g l_{max} \cos\alpha_{max},$$

откуда находим

$$\alpha_{max} = \arccos\frac{\pi\sigma d_2}{Mg}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right).$$

Минимальное значение угла между осью капилляра и вертикалью будет соответствовать случаю, когда прак-



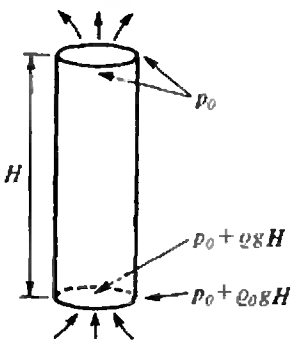
Задачник „Кванта"

тически вся капля находится в широкой части капилляра. Аналогично предыдущему, находим

$$\alpha_{\min} = \arccos \frac{\pi \sigma d_1}{Mg}\left(\frac{d_1}{d_2} - 1\right).$$

А. Зильберман

Ф1195. *Вертикальная труба высотой $H=1$ м и площадью поперечного сечения $S=50$ см^2 открыта с двух концов. В нижней части трубы установлен нагреватель мощностью $N=100$ Вт. Какая скорость восходящего потока установится в трубе? Считайте, что нагреватель не загораживает поперечное сечение трубы. Атмосферное давление $p_0=1$ атм, температура снаружи комнатная. Молярная теплоемкость воздуха при неизменном объеме $C_V=2{,}5\ R$, где R — универсальная газовая постоянная.*



Очевидно, что нагрев приводит к уменьшению плотности воздуха, и архимедова сила, действующая на горячий воздух, поднимает его вверх, т.е. возникает восходящий поток воздуха в трубе.

Разобьем задачу на две части.

1) Пусть плотность воздуха в трубе ρ, плотность окружающего воздуха ρ_0 ($\rho<\rho_0$). Какова будет скорость равномерного движения воздуха в трубе?

Обозначим давление вблизи верхнего конца трубы (см. рисунок) p_0. Тогда вблизи нижнего конца внутри трубы давление будет $p_0+\rho gH$, а снаружи $p_0+\rho_0 gH > p_0 + \rho gH$. Получается, что вблизи нижнего отверстия трубы воздух, имеющий нулевую скорость, засасывается в трубу, где его давление падает, а скорость увеличивается до некоторого значения v. Найдем его, воспользовавшись уравнением Бернулли:

$$\rho\frac{v^2}{2} + p = \text{const}, \text{ или } \frac{\rho v^2}{2} + p_0 + \rho gH = p_0 + \rho_0 gH,$$

откуда получаем

$$v = \sqrt{2\frac{\rho_0-\rho}{\rho}gH}.$$

2) Зная мощность нагревателя N, найдем отношение $(\rho_0-\rho)/\rho$.

Мимо нагревателя проходит поток воздуха $\rho v S$ (масса в единицу времени) или $\frac{\rho}{M}vS$ (количество вещества в единицу времени). Нагрев происходит при постоянном давлении, поэтому

$$N = \frac{\rho}{M}vSC_p\Delta T,$$

где $C_p = C_V + R = 7/2\ R$, а ΔT равно разности температур внутри трубы (после нагревателя) и снаружи. При постоянном давлении и при $\Delta T/T \ll 1$

$$\frac{\rho_0-\rho}{\rho} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\Delta T}{T}.$$

Таким образом,

$$v^2 = 2\frac{\rho_0-\rho}{\rho}gH = 2\frac{\Delta T}{T}gH = \frac{2NMgH}{T\rho vSC_p},$$

или

$$v^3 = \frac{2NMgH}{T\rho SC_p} = \frac{2NgHR}{pSC_p} = \frac{4}{7}\frac{NgH}{pS} \approx \frac{4}{7}\frac{NgH}{p_0S}.$$

(Продолжение см. на с. 42)

«Калейдоскоп Кванта»

Я не колеблясь утверждаю, что один только взгляд на призматический спектр дает возможность указывать на присутствие... мельчайших количеств веществ...

Ф. Тальбот

А так ли хорошо знакомы вам

спектры

?

С открытия Ньютона, разложившего белый свет на составляющие цвета и собравшего их вновь воедино, началась *наука о цвете*. Он же ввел и название — спектр. Вопрос о происхождении и природе спектров многие десятилетия не привлекал к себе должного внимания исследователей. Случайно наблюдая спектральные линии в самых разнообразных условиях, они не делали никаких выводов. Так было до тех пор, пока в середине XIX века Г. Кирхгоф не связал прочно спектральные линии с химическим составом излучающего или поглощающего вещества и не разработал совместно с Р. Бунзеном метод спектрального анализа.

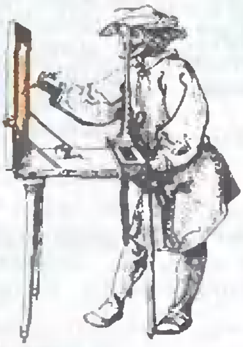
Последующие годы принесли массу открытий, поток которых не иссякает и по сей день. Многие клеточки периодической таблицы элементов заполнены благодаря спектральному анализу. Без спектроскопов не обходится астрономия, накопившая с их помощью многие знания о Вселенной, о физических свойствах звезд, их химическом составе и движении.

Изучение спектров проложило дорогу в миры атомов и галактик, и задачи нынешнего выпуска «Калейдоскопа» — лишь несколько шагов по этому увлекательнейшему пути.

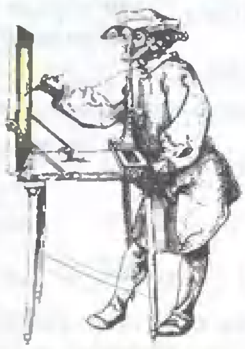
Вопросы и задачи

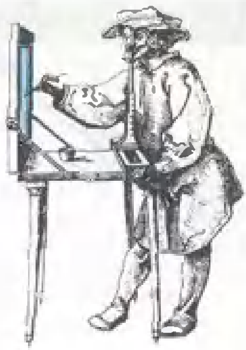
1. Почему белый свет, пройдя через оконное стекло, не разлагается на составные цвета?

2. Какие изменения в спектре лампы наблюдаются при ее постепенном накаливании?



3. Рядом с горящей электрической лампой помещены два стекла — красное и синее — с прикрепленными к ним кусочками воска. От какого из стекол скорее отпадет воск?

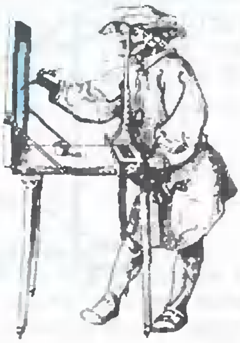




4. Какую окраску принимают предметы при освещении их монохроматическим светом натриевой лампы?

5. Если изделие из керамики, на светлом фоне которого сделан темный рисунок, поместить в печь с высокой температурой, то виден светлый рисунок на темном фоне. Почему?

6. Каков спектр поглощения черного вещества?

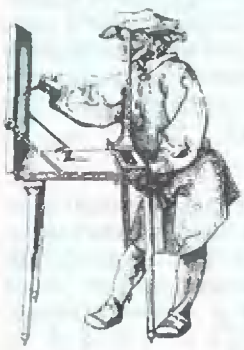


7. Чем меньше длины волн, тем быстрее меняется показатель преломления. Как это отражается на спектре, полученном с помощью стеклянной призмы?

8. Белый свет падает на абсолютно зеркальную поверхность, смещающуюся вдоль лучей. Как меняется при этом спектральный состав отраженного света?

9. Какие источники света — синие, зеленые или красные — должны быть менее заметны с большой высоты, например, из *кабины самолета?*

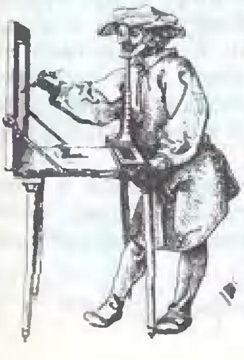
10. Видимая днем Луна имеет чистый белый цвет, а после захода Солнца она принимает желтоватый оттенок. Почему?

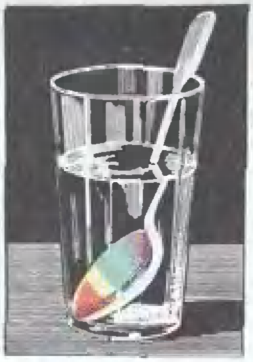


11. Могут ли красные лучи вызвать люминесценцию?

12. Каким образом в театрах незаметно для зрителей вызывают *свечение* декораций?

13. Можно ли методами спектроскопии обнаружить антимиры — предполагаемые скопления материи, в которых ядра атомов состоят из антипротонов и антинейтронов, а их оболочки — из позитронов?





Микроопыт

Накапайте несколько капель молока в стакан с водой и посмотрите сквозь него на горящую лампочку. Какого цвета покажется она вам? Теперь посмотрите на свет, отраженный от стакана, сбоку — каков его цвет? Почему?

Любопытно, что...

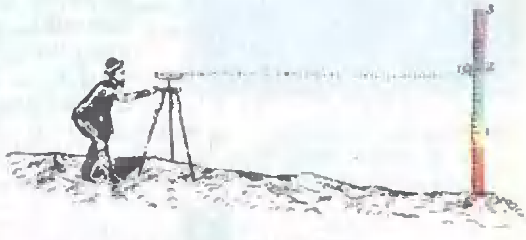
...после того, как спектральный анализ показал наличие в атмосфере Солнца многих химических элементов, в том числе и золота, один из приятелей Кирхгофа заметил ему: «Ну и что толку от вашего солнечного золота? Ведь его все равно не доставить на Землю!» Прошло несколько лет, и Кирхгоф получил золотую медаль за свои замечательные исследования.

...только 9 % энергии солнечного излучения несут с собой ультрафиолетовые лучи и 44 % энергии приходится на видимую часть спектра. Остальные 47 % своей энергии Солнце посылает нам в виде инфракрасных лучей.

...спектральный состав света, излучаемого звездой, зависит от температуры ее поверхности. Чем выше температура звезды, тем меньше длина волны, на которую приходится максимум в спектре ее излучения. Поэтому звезды кажутся красными, белыми, голубыми.

...на могиле Фраунгофера, открывшего темные линии в спектре Солнца и изучавшего спектры планет и звезд, признательные соотечественники воздвигли памятник с надписью «Приблизил звезды».

...в 1910 году молодой австрийский физик А. Гааз предпринял первую попытку построения квантовой теории водородного атома. Однако видные ученые признали «наивной» попытку Гааза сочетать столь «несовместимые» вещи, как спектроскопия и квантовая теория. Его диссертация была провалена.



Что читать о спектрах в «Кванте»
(публикации последних лет)

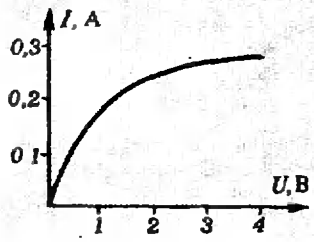
1. «Абсолютно черное тело» — 1985, № 2, с. 26;
2. «Как увидеть невидимое?» — 1985, № 3, с. 20;
3. «Формула Бальмера» — 1985, № 12, с. 16.
4. «Зеленый луч» — 1986, № 6, с. 16;
5. «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» — 1987, № 12, с. 32;
6. «Что и как мы видим» — 1988, № 3, с. 34;
7. «Кто творит радугу» — 1988, № 6, с. 46;
8. «Градусник для Солнца» — 1988, № 10, с. 40;
9. «Калейдоскоп «Кванта» — 1989, № 2.

Окончательно получаем

$$v \approx \sqrt[3]{\frac{4NgH}{7\rho_0 S}} \approx 1\ \text{м/с}.$$

М. Цыпин

Ф1196. *Рабочее напряжение лампочки, вольт-амперная характеристика которой приведена на рисунке, равно 3,5 В (кривая обрывается при напряжении 4 В — лампочка перегорает). Две такие лампочки соединяют последовательно и подключают к источнику с напряжением 5 В. Какой ток потечет по цепи? Какой резистор нужно подключить параллельно одной из лампочек, чтобы напряжение на другой составило 3,5 В? Перегорит ли какая-нибудь из лампочек, если этот резистор заменить еще одной такой же лампочкой?*



При последовательном подключении двух одинаковых лампочек напряжения на них будут одинаковыми и равными 2,5 В каждое (напряжение достаточно мощного источника не меняется при подключении к нему различных нагрузок). Таким образом, по цепи потечет ток (см. вольт-амперную характеристику)

$$I = 0{,}26\ \text{А}.$$

Во втором случае, когда параллельно одной из лампочек подключен резистор, напряжение на второй лампочке составляет 3,5 В, а на первой оно равно 5 В — 3,5 В = 1,5 В. Из вольт-амперной характеристики получаем, что через лампочки текут токи 0,22 А и 0,28 А соответственно. Значит, ток через резистор равен 0,28 А — 0,22 А = 0,06 А, и его сопротивление

$$R = \frac{1{,}5\ \text{В}}{0{,}06\ \text{А}} = 25\ \text{Ом}.$$

Теперь обсудим, перегорит ли какая-нибудь из лампочек в третьем случае. Ясно, что говорить нужно об «одиночной» лампочке. Пусть напряжение на ней равно предельному значению 4 В, что соответствует току 0,28 А. При токах 0,14 А (половина от 0,28 А) напряжение на лампочках, включенных параллельно друг другу, составило бы 0,7 В. Это означает, что напряжение на «одиночной» лампочке может достичь своего предельного значения 4 В при напряжении источника 4 В + 0,7 В = 4,7 В. Следовательно, при напряжении источника 5 В «одиночная» лампочка должна перегореть.

А. Зильберман

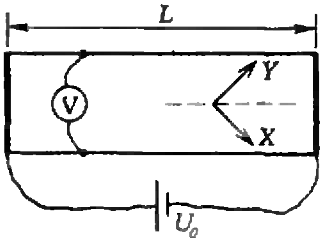
Ф1197. *При исследовании электрических свойств тонкой пластинки нового соединения было обнаружено, что его проводимость существенно анизотропна: вдоль одного направления (ось X) она максимальна, а вдоль перпендикулярного направления (ось Y) — минимальна. Из пластинки вырезали образец в виде полоски длиной L и шириной d ($L \gg d$) под углом $\alpha = 45°$ к осям X и Y и подключили к концам полоски источ-*

Проводимость σ — это, по определению, коэффициент пропорциональности между плотностью тока $\vec{j}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$. В изотропном проводнике направления напряженности поля и плотности тока совпадают и $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. В анизотропной среде, например в кристалле, проводимость вдоль разных осей может быть разной.

В нашем случае проводимость σ_x вдоль оси X превосходит проводимость σ_y вдоль оси Y, поэтому плотность тока не совпадает по направлению с напряженностью электрического поля:

$$j_x = \sigma_x E_x,\ j_y = \sigma_y E_y,\ \text{но}\ \frac{j_x}{j_y} \neq \frac{E_x}{E_y}\ !$$

ник с напряжением U_0 (см. рисунок). Измерив напряжение между краями полоски в поперечном направлении, получили значение U ($U \ll U_0$). Определите отношение проводимостей вдоль осей X и Y.



Задачник „Кванта"

Ток в образце течет вдоль полоски, а напряженность электрического поля направлена под углом к току и складывается из продольной составляющей, равной $E_1 = U_0/L$, и поперечной составляющей, равной $E_2 = U/d$. Проекции напряженности на оси X и Y равны соответственно

$$E_x = (E_1 - E_2)\cos 45^\circ = \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}},$$

$$E_y = (E_1 + E_2)\cos 45^\circ = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}.$$

Тогда для проекций плотности тока можно записать

$$j_x = \sigma_x E_x = \sigma_x \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}},$$

$$j_y = \sigma_y E_y = \sigma_y \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку ток течет вдоль полоски, $j_x = j_y$, т. е.

$$\sigma_x \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}} = \sigma_y \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}.$$

Значит, искомое отношение проводимостей равно

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{U_0/L + U/d}{U_0/L - U/d}.$$

А. Буздин

Нам пишут

В статье «Три формулы Рамануджана» («Квант» № 6 за 1988 год) приведен ряд интересных формул с тригонометрическими функциями. Автор этих формул *В. С. Шевелев* прислал нам еще две формулы такого типа:

$$\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{4\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{4\pi}{7}}{\cos\frac{8\pi}{7}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{7}}{\cos\frac{4\pi}{7}}} = -\sqrt[3]{7},$$

$$\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{9}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{8\pi}{9}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{9}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{8\pi}{9}}} + \sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}}} = -\sqrt[3]{9}.$$

Попытайтесь доказать эти красивые формулы методами статьи «Три формулы Рамануджана». В «Кванте» № 10 за 1988 год в разделе «Избранные школьные задачи» под номером 2 была опубликована задача, в которой утверждается, что при $xyz = 1$

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

А. М. Колесников из Ростовской области обнаружил следующее обобщение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — такие числа, что $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Тогда

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\ldots x_{n-1}} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_2x_3\ldots x_n} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+\ldots+x_nx_1x_2\ldots x_{n-2}} = 1.$$

Доказательство получается сложением n очевидных равенств:

$$\frac{x_1x_2\ldots x_i}{1+x_1+x_1x_2+\ldots+x_1x_2\ldots x_{n-1}} = \frac{1}{1+x_{i+1}+x_{i+1}x_{i+2}+\ldots+x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i-1}},$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, и по определению $x_{n+j} = x_j$.


ТИШКОВ

ЦИФЕРТОН

(фантастический рассказ)

С. САЙКС (США)

На Рождество все словно взбесились. Реклама компьютерной игры не сходила с телевизионных экранов. Дети ныли и клянчили у родителей новомодную игрушку.

Дэн Морган вспомнил, как во времена его детства поток хула-хупов разноцветной волной захлестнул всю округу, и не устоял: приобрел для своего девятилетнего сына «Цифертон». Наблюдая, как Джеред срывает с коробки обертку, Дэн подумал, что игра эта проста обманчивой простотой. Она была выполнена в виде маленькой — размером с пирог — «летающей тарелки» черного цвета. Перед игроком ставилась задача повторять во все усложняющемся порядке комбинации мигающих огней и звуков. Четыре огонька — красный, синий, желтый и зеленый — вспыхивали в случайной последовательности, сопровождаемые четырьмя мелодичными звуками разных тонов.

— Ух! «Цифертон»! — восторженно завопил Джеред и жестом профессионала возложил руки на цветные клавиши: он уже поднаторел в теории, поскольку с октября не пропускал ни одной рекламы, которыми перелаивали по субботам утренние программы мультфильмов. Кэсс на минуту отвела восхищенный взгляд от шелкового платья, подаренного Дэном, и посмотрела на зачарованного игрой сына.

— Хорошо, что ты не забыл купить для нее батарейки,— сказала она позже, когда супруги очищали квартиру от коробок, обрывков бечевки и разноцветной рождественской упаковочной бумаги.

— Чертовски дорогая игра,— проворчал Дэн.— Надеюсь, она окажется долговечнее, чем «Воздушный хоккей», что я подарил в прошлом году.

— Но, милый, хоккей сломал ты, а не Джеред.

...Пока Джеред демонстрировал своим друзьям на улице новый велосипед, Дэн оторвался от уборки, чтобы испробовать компьютерную игру. Он прикоснулся к клавишам, но огоньки не зажглись. Тогда он мягко нажал, копируя движения сына,— игрушка молчала.

— Проклятье! Она уже сломана!

Кэсс подняла голову, продолжая сворачивать бумагу.

— Уже? Ты уверен? Ты прочитал инструкцию?

— Где коробка?

Кэсс разгребла бумажный хлам.

— По-моему, ты сжег ее в камине.

— Я люблю порядок,— вздохнул Дэн и отложил игру в кучу старых игрушек Джереда.— Ребенок не читал никаких инструкций. Откуда он знал, как она работает?

— Чудеса телевидения. Если бы ты каждую субботу просиживал с зари перед экраном, то не только стал бы специалистом по компьютерным играм, но и знал наизусть все рекламные гимны во славу овсянке.

...В комнату ворвался Джеред.

— Где мой «Цифертон»?! — закричал он...

— «Цифертон» в игрушках. Унеси все барахло к себе и мой руки. Обед почти готов.

— Я только покажу «Цифертон» Майку и Кевину.

— Потом,— отрезала Кэсс.

— Ну, на минутку!

Дэн кашлянул.

— Ты слышал, что сказала мама?

Этот рассказ мы перепечатываем (с небольшими сокращениями) из журнала «Изобретатель и рационализатор» (1986, № 5). Перевод В. Бабенко.

«Точь-в-точь слова моего отца,— подумал он.— Штампы, заученные в детстве. Наступит, вероятно, день, когда Джеред скажет то же самое собственному сыну. Есть и другие классические примеры родительских ответов. Там видно будет... Спроси у матери... Последний раз тебе говорю... Сделай немедленно!.. Подожди, вернемся домой... Считаю до трех... Ну, сколько тебе можно повторять?.. Очевидно, ровно столько, сколько необходимо, чтобы штампы без искажений передавались следующему поколению...»

Дэн оторвался от газеты и посмотрел на сына. Мальчик сидел, скрестив ноги, на полу и играл с «Цифертоном». Прошло уже две недели, а ребенку до сих пор не надоело. Ни с одной игрушкой так не было. Напротив, Джеред ушел в игру с головой, все больше увлекаясь мигающими огоньками и причудливыми гармоничными звуками. «Порой он даже предпочитает игру телевизору, что само по себе уже фантастика»,— подумал Дэн.

— Дай-ка я попробую,— сказал он, отложив газету.

Джеред, казалось, не слышал. Он весь был в игре, продолжая повторять сочетания огоньков. Каждый раз, когда он ошибался, компьютер издавал резкий диссонирующий звук и начинал все сначала — с одного огонька и одной ноты.

«Цифертон» полыхнул зеленым. Джеред нажал на зеленую клавишу и повторил сигнал. Зажглись зеленый и желтый огоньки, тут же прозвучали две тихие мелодичные ноты. Мальчик нажал на зеленую и желтую клавиши и в награду получил третий цвет и третий звук. Когда серия усложнилась до комбинации из двенадцати вспышек и нот, Джеред ошибся и ему пришлось начинать с начала.

— Эй! — окликнул Дэн, опускаясь на пол рядом с сыном.— Теперь я.

Джеред и ухом не повел.

Дэн дотронулся до него, удивляясь полной отрешенности ребенка.

— Джеред?!

Только теперь мальчик вышел из транса. Он поднял глаза, и на какой-то миг Дэн уловил в них выражение, которое глубоко поразило его. Будто на него смотрел незнакомец — он был намного старше и гораздо мудрее девятилетнего мальчика. Затем незнакомец растаял, и снова появился ребенок.

— Ты чего, пап?

— Что?.. Э-э... Можно мне попробовать? По-моему, это занятная штука.

— Конечно! Держи.— Мальчик передал ему «Цифертон».— Знаешь, как играть?

— Нужно повторять последовательность огоньков, да?

— Ага. А если дашь промашку, она тебе гуднет малиновым. Лучше начинай с самой простой серии. Ты должен правильно повторить одиннадцать вспышек, чтобы выйти на первый уровень. Я сейчас на втором. Мне надо выдать двадцать подряд, а я пока на тринадцати сбиваюсь. Несчастливое число.

Дэн уселся, как Джеред, скрестив ноги, и положил руки на пластмассовые клавиши.

— Ничего не происходит.

Джеред хихикнул.

— Ты забыл включить.— Он указал на маленькую кнопку, которую Дэн раньше не замечал.

— А... Понял. Ну, «Цифертон», поехали.

Дэн дошел до пяти и сбился — к великой радости сына.

В комнату вошла Кэсс.

— Ребята! Пора ужинать! — позвала она.

— Черт! Из-за тебя я ошибся,— возмутился Дэн и начал с начала.

— Не из-за меня! — огрызнулась Кэсс.— Я только сказала...

— Тихо! Я не могу разговаривать и одновременно...

«Цифертон» снова малиново тявкнул. Джеред повалился на спину, заливаясь смехом.

— Еда на столе,— повторила Кэсс.

— Минутку,— пробормотал Дэн.— Дай мне только набрать одиннадцать.

Кэсс в растерянности замолчала, глядя на сгорбившегося над игрой мужа. Дойдя до семи, он неизменно ошибался в последовательности огоньков и ему приходилось начинать с нуля.

— Все сгниет, прежде чем ты выиграешь,— вздохнула Кэсс.

— Тс-с! После пяти она ускоряет темп. Ты заметила? Если промедлишь хоть секунду — считай пропало.

— Погоди, вот доберешься до второго уровня...— сказал Джеред.— У нас в школе один парень дошел до третьего. Но он «профессор» в математике. И еще играет на пианино. Помоему, это помогает. Па, можно мне учиться на пианино?

— А что общего у пианино с «Цифертоном»? — удивилась Кэсс.

— Не знаю. Это вроде как музыка. Бобби Эйвори играет с закрытыми глазами и доходит до шестнадцати. Он говорит, что у него в голове звучит песенка.

— Эти двое когда-нибудь замолчат?!— разъярился Дэн.— Я не могу сосредоточиться!

Кэсс молитвенно возвела глаза.

— Почему ты не можешь просто смотреть телевизор, как другие мужья? Хватит с меня одного девятилетнего ребенка в семье... Еда на столе, джентльмены. Мойте руки.

— Слышал, что мама сказала? — обратился Дэн к Джереду.

— А ты, пап?

— Иди, иди...

Кэсс и Джеред сидели за столом и ужинали, когда к ним присоединился торжествующий Дэн.

— Она пикает, когда выигрываешь,— сообщил он.— Я выдал одиннадцать подряд. Не так уж сложно, если умеешь сосредоточиться.

— Тебе потребовалось всего тридцать минут,— согласилась Кэсс.

— Ты преувеличиваешь. На самом деле...— Дэн взглянул на часы и заморгал.— Ну и ну! А казалось, что прошло всего две-три минуты. Как так?

Отбивная остыла, но Дэн счел за лучшее не комментировать сей факт.

— Идешь на второй уровень, пап?

— Конечно. Почему нет? Двадцать подряд — пара пустяков.

Двадцать подряд оказалось не парой пустяков. Дэн ощутимо расстроился, когда Джеред первым добился успеха и приступил к третьему уровню: теперь ему нужно было выстроить последовательность из тридцати двух огоньков и звуков. Последний уровень, четвертый, состоял — по слухам — из пятидесяти шести вспышек, но Джеред не знал никого, кто совершил бы такой невероятный подвиг.

— Все дело в сосредоточенности,— объяснял Дэн Ларри Хейесу, когда они ехали в город, где оба работали в электротехническом отделе фирмы «Воссман».— Это на самом деле увлекательная игра. Уж так затянет — не оторвешься. Хочется играть еще и еще... Уже прошло три месяца, а Джереду нисколько не надоело. Он уже бьется над четвертым уровнем, самым высоким. А я застрял на третьем. Даже не знаю, удастся ли мне когда-нибудь повторить серию из тридцати двух вспышек.

Хейес усмехнулся.

— Мой парень тоже требует «Цифертон» на день рождения. Кажется, он сведет меня с ума.

— Не говори,— улыбнулся Дэн.— Но все-таки благодаря этой игре у Джереда улучшились отметки. Не понимаю, каким образом, но, похоже, мальчик впервые выходит в отличники. И представь, он умолял нас — *умолял,*— чтобы ему позволили учиться на пианино. Будто это помогает с «Цифертоном». Ты понимаешь?! В его возрасте я упрашивал родителей, чтобы они разрешили мне *бросить* скрипку... Самая странная игра из всех, что я видел.

— Да, наши дети живут в эпоху вычислительных машин, это уж точно,— кивнул Хейес.— Моему парню одиннадцать, а у него четыре... нет, пять разных компьютерных игр и игрушек. Я даже не знаю, как некоторые из них работают. Порой я чувствую себя невеждой. Господи, что случилось с бейсболом, воздушными змеями, салочками?! Куда делись спортивные игры? Дети только и делают, что сидят да нажимают на кнопки. Нет, не нравится мне все это...

— Дэн! — Кэсс толкнула в темноте мужа.— Дэн, проснись!

— Что?..

— Проснись.

Дэн зевнул и перевернулся на бок.

— Что случилось?

— Тихо. Ты слышишь?

— Что — слышишь?

— Он снова за игрой.

Дэн прислушался. Он уловил мелодичные звуки «Цифертона», которые доносились из спальни Джереда. Дэн нащупал в темноте часы и нахмурился, различив светящийся циферблат.

— О боже! Четвертый час... Какого черта он играет?!

— Я же говорила, что и прошлой ночью мне послышались эти звуки, но ты заявил, что я свихнулась. Дэн, пойди и отбери у него игру. Это уже не смешно! Он теперь вообще ничем другим не занимается. Меня тошнит, когда я ее слышу. По-моему, она на него влияет.

— Каким образом?

— Не знаю. Вроде бы... он становится другим. Ты не замечал?

— У него превосходные отметки в школе. Может быть, у нас с тобой растет Эйнштейн. Что здесь плохого?

— Дело не в отметках, Дэн. Тут что-то другое... Ты видел, какие у него становятся глаза после этой чертовой игры?

Дэн все чаще и чаще видел это выражение в глазах сына. Взгляд того самого незнакомца, только теперь чужак жил в Джереде дольше и медленнее исчезал после того, как мальчик выныривал из состояния глубочайшей сосредоточенности. Дэн не делился с Кэсс своими наблюдениями, считая их скорее плодом собственного воображения.

— Он какой-то наэлектризованный,— продолжала Кэсс.— Я по несколько минут не могу до него докричаться. Кажется, эта игра гипнотизирует мальчика. Мне приходится словно отзывать его откуда-то. Это жутко, Дэн. Ты, конечно же, замечал такое?..

У Дэна давно уже не хватало времени на «Цифертон», но он помнил смутное ощущение отрешенности, возникающее после игры с огоньками. Дэн сравнивал это состояние с глубокой медитацией или по крайней мере со своим представлением о медитации, ибо у него никогда не было ни времени, ни склонности заниматься йогой, трансцендентальной медициной или какими-либо иными эзотерическими учениями, столь модными в дни его молодости.

— Ну, ты идешь? Или должна пойти я? — Кэсс зевнула.

Дэн пошарил под кроватью в поисках тапочек, чертыхнулся и зашлепал босиком по коридору к комнате Джереда, по пути считая доносящиеся до него мелодичные звуки. «Цифертон» резко фыркнул на пятьдесят первой ноте.

Он не стал зажигать свет, чтобы пощадить глаза, молящие о темноте. Мелодичное пиканье продолжалось. Остановившись у двери Джереда, Дэн считал про себя звуки.

Он отворил дверь, приготовившись сначала поздравить сына с близким финишем, а затем строго отчитать за ночные бдения, но картина, открывшаяся глазам Дэна, лишила его дара речи. Маленькая, темная словно тень фигурка неестественно прямо сидела посреди постели, скрестив ноги. Во мраке комнаты желтые, красные, зеленые и синие вспышки призрачными огнями озаряли лицо мальчика. Его широко раскрытые, немигающие, невидящие глаза были устремлены куда-то вдаль, а руки летали по клавишам, отвечая на цвета и звуки, диктуемые игрушкой. Дэн уставился на ребенка — на незнакомца! — с головокружительной скоростью играющего на компьютере, и по его спине забегали мурашки. В глубинах сознания раздался предостерегающий шепот. Дэн понял, что ему ни в коем случае не следует тревожить сына. Он должен тихо стоять и ждать, когда Джеред... вернется. Тормошить его сейчас — значит, мешать... мешать чему? Переносу... Дэн не понял, что означало это слово и почему оно пришло ему на ум. Единственное, в чем он был уверен,— это в том, что мальчик на грани душевного срыва.

Он стоял и ждал, считая про себя вспышки и звуки. Пятьдесят один, пятьдесят два, пятьдесят три... Раздался мягкий диссонирующий перезвон, словно компьютер выговаривал ребенку за ошибку. Джеред глубоко вздохнул и отложил игру.

— Ты давно тут... смотришь? — спросил мальчик, включив ночник.

— Несколько минут,— ответил Дэн, чувствуя себя виноватым, как будто нарушил чью-то сокровенную молитву. Джеред поднял на него глаза, и Дэн поразился мудрости и великодушию, светившимся во взгляде сына. В этих глазах не было ничего от его ребенка, но существо, которое на него смотрело, каким-то образом беззвучно успокаивало Дэна, заверяло, что все идет должным порядком.

— Ты знаешь, который час? — наконец спросил Дэн.

— Мне теперь не хочется много спать,— отрешенно сказал Джеред.— В сущности, мне нужно спать совсем мало. Я чувствую себя вполне отдохнувшим. Тебе мешают звуки?

— Н-нет... Джеред... Пожалуйста... Не играй больше в эту игру...

— Но я почти ТАМ...

— Знаю. Просто... Я думаю, тебе нужно на время оставить «Цифертон», вот и все.

— Если ты достигнешь четвертого уровня, то сможешь пойти со мной,— тихо проговорил мальчик.

Дэн покрылся испариной от страха. Он подошел к постели и сел рядом с сыном.

— Пойти с тобой — куда, Джеред?

— Туда.

— Не понимаю. Куда ты собрался?

— Это...— Мальчик заморгал, и незнакомец внутри него стал медленно исчезать.— Это... какое-то иное место... Они... учат нас...

— Учат? Чему?

— Тому, что мы должны знать.

— Кто такие «они»? — Дэн никак не мог решить, спит Джеред или бодрствует. Сын уже слишком большой для детских фантазий, со своим последним невидимым собеседником он расстался лет пять назад, когда пошел в детский сад. «Мальчик, должно быть, спит,— подумал Дэн,— спит и разговаривает спросонья, как другие ходят во сне.»

— Я не сплю,— сказал Джеред, прочитав его мысли.— Ты за меня не беспокойся. Они не причинят нам вреда. Они пытаются помочь.

Дэн взял в руки компьютерную игру.

— В общем, так. До поры до времени «Цифертона» ты не увидишь.

Джеред потянулся к коробке.

— Нет! Прошу тебя! Не отбирай игру! Мне она нужна. Папа, я почти там!

— Черта с два! А сейчас ложись!

— Отда-а-ай! — Вот теперь сын окончательно вернулся.

— Может быть, потом. Не сегодня. Спать! — С этими словами Дэн выключил ночник.— Завтра поговорим.

Слова его отца... Один к одному. Сколько захватывающих приключений его собственного детства откладывалось навсегда с обещанием «Поговорим завтра»!

— Значит, это и есть «Цифертон»? — спросил Хейес, когда Дэн достал игру в электричке.

— Он самый. Сегодня застукал Джереда за игрой в три часа ночи. Сна ни в одном глазу — сидит и играет. Я в сомнении. У него уже получаются пятьдесят три вспышки подряд. Мне кажется, если он дойдет до конца, его увезут в «психушку». Ночью он не на шутку напугал меня.

Хейес протянул руку и взял игру.

— Как это?

— Ну, не знаю... Он бормотал что-то, как *«Они»* чему-то учат его и как он «уйдет» куда-то. Я на самом деле очень встревожен, Ларри. Эта чертова игра вызывает галлюцинации, будто наркотик. Я отобрал ее у парня.

— А ты уверен, что это не зависть? Ведь ты прочно застрял на третьем уровне... Как в нее играть?

(Окончание следует)

Небольшой переполох в аптеке

Как-то раз в аптеку доставили 10 флаконов лекарства. В каждом флаконе по 1000 пилюль. Не успел провизор мистер Уайт расставить флаконы на полке, как почтальон принес телеграмму.

Мистер Уайт читает телеграмму управляющей аптекой мисс Блек.

Мистер Уайт. Срочно. Воздержитесь от продажи лекарства. По ошибке фармацевта в одном из флаконов каждая пилюля содержит на 10 мг лекарства больше допустимой дозы. Просьба незамедлительно вернуть флакон с повышенной дозой лекарства.

Мистер Уайт встревожился.

Мистер Уайт: «Нечего сказать, повезло! Теперь мне придется брать по пилюле из каждого флакона и взвешивать. Веселенькое занятие!»

Тяжело вздохнув, мистер Уайт хотел было приступить к неожиданно свалившейся на него работе, как мисс Блек остановила его. Мисс Блек: «Минуточку! Взвешивать 10 раз совсем не нужно! Достаточно произвести 1 взвешивание.»

Каким образом при помощи 1 взвешивания можно установить, в каком флаконе пилюли содержат повышенную дозу лекарства?

Идея мисс Блек состояла в том, чтобы взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 3 пилюли из третьего флакона,..., 10 пилюль из десятого флакона...

...положить 55 отобранных пилюль на одну чашу весов и взвесить их. Предположим, что пилюли весили бы 5510 мг, или на 10 мг больше, чем следует. Тогда мисс Блек заключила бы, что среди отобранных пилюль имеется 1 пилюля с повышенной дозой лекарства, а ровно 1 пилюля была извлечена из первого флакона.

Если бы вес 55 пилюль оказался на 20 мг больше нормы, то это означало бы, что среди отобранных пилюль имеются 2 пилюли с повышенной дозой лекарства. Их можно было извлечь только из второго флакона. Так мисс Блек сумела понизить число взвешиваний до 1. Меньше не бывает!

Через 6 месяцев в аптеку доставили еще 10 флаконов того же лекарства. И на этот раз не успели распаковать коробку с флаконами, как почтальон принес телеграмму с извещением о том, что на этот раз фармацевт допустил более серьезную ошибку.

В посылке могло оказаться от 1 до 10 флаконов с пилюлями, каждая из которых на 10 мг тяжелее нормы. Мистер Уайт был вне себя от ярости.

Мистер Уайт: «Что делать, мисс Блек? Ваш метод, который позволил нам так блестяще выйти из затруднения в прошлый раз, неприменим!» Мисс Блек задумалась.

Мисс Блек: «Вы правы, мистер Уайт. Но если слегка модифицировать мой метод, то при помощи 1 взвешивания и на этот раз можно определить, в каких флаконах пилюли содержат повышенную дозу лекарства.»

Что имела в виду мисс Блек?

Как определить непригодные пилюли?

По условиям первой задачи на взвешивание пилюль все более тяжелые пилюли находятся в одном флаконе. Взяв из различных флаконов различное число пилюль (проще всего взять из каждого флакона число пилюль, равное его номеру), мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством номеров и множеством флаконов.

Чтобы решить вторую задачу, необходимо воспользоваться последовательностью, которая бы сопоставляла каждому флакону отличный от других номер и обладала бы еще одним дополнительным свойством: сумма членов любой ее подпоследовательности должна быть отличной от суммы членов любой другой ее подпоследовательности. Существуют ли такие последовательности? Да, существуют. Примером может служить хотя бы геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и первым членом 1: 1, 2, 4, 8, 16, ... Все члены этой последовательности — степени числа 2, причем показатель возрастает от 0 с единичным шагом. Именно эта последовательность лежит в основе двоичной системы счисления.

Решение задачи состоит в том, чтобы, выстроив флаконы в ряд, взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 4 пилюли из третьего флакона и т. д., затем собрать все отобранные пилюли и взвесить. Предположим, что пилюли оказались на 270 мг тяжелее, чем нужно. Так как

(Окончание см. на с. 61)

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. На дерево села стая птиц — на каждую ветку по три птицы, а одна птица продолжала летать вокруг дерева. Потом все птицы пересели на дерево по четыре на ветке, при этом одна ветка осталась свободной. Сколько было птиц и сколько веток?

2. В одной из новогодних телепередач поэт А. Вознесенский прочитал свое стихотворение, в котором утверждалось, что шоферы считают счастливыми те номера машин, в которых сумма цифр первой половины номера равняется сумме цифр второй половины. Номер 19—82 — счастливый, так как $1+9=8+2$. А в одной из передач серии «Следствие ведут знатоки» утверждалось, что по шоферскому поверью счастливым является номер, в котором сумма чисел первой и второй половины равняется 100, например 19—81, так как $19+81=100$.

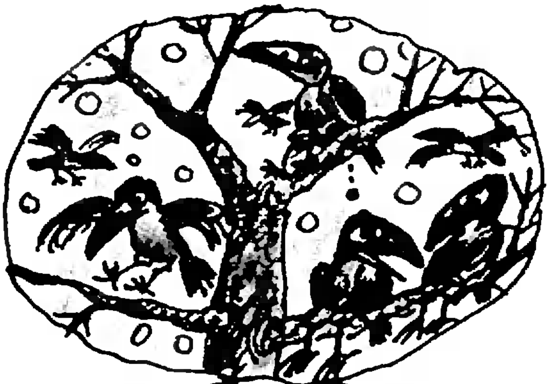
Перечислите все номера, счастливые одновременно в первом и во втором смысле.

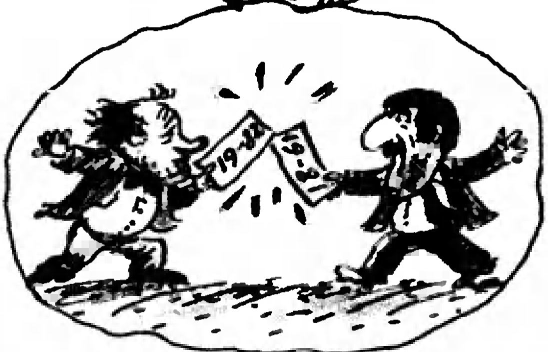
3. Число БАОБАБ делится на 101. Какое это число?

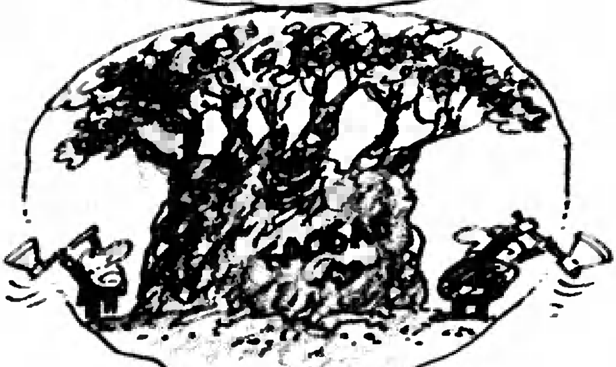
4. Из последовательности всех простых чисел: 2, 3, 5, 7,... построили две другие последовательности: $5=2+3$, $8=3+5$, $12=5+7$, ... и $6=2\cdot 3$, $15=3\cdot 5$, $35=5\cdot 7$, ... В первом случае складываются последовательные простые числа, а во втором — они перемножаются. Может ли какой-нибудь член первой последовательности равняться некоторому члену второй последовательности?

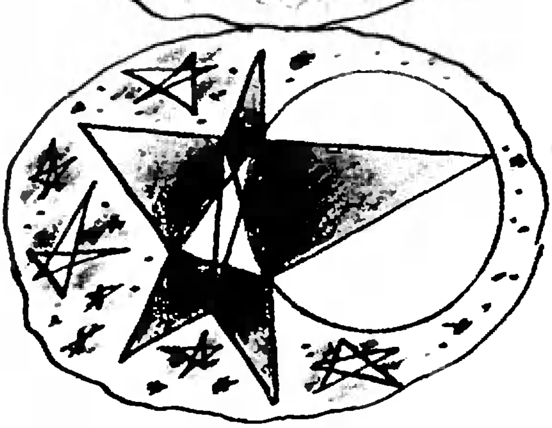
5. Существует ли пятиугольная звездочка с таким свойством: вокруг любого ее красного четырехугольника (см. рисунок) можно описать окружность?

Эти задачи нам предложили ученик 10 класса из Навои Эмамбердин Эгамбердиев, А. Швецов, А. Савин, ученик 9 класса из Еревана Арам Акопян, И. Нагель.









ЕЩЕ РАЗ О ЗАКОНЕ ПАСКАЛЯ

Кандидат физико-математических наук
А. ШТЕЙНБЕРГ

Наш сегодняшний разговор о законе Паскаля мы хотим начать с эксперимента, который, возможно, покажется читателю несколько странным и не имеющим отношения к этой «жемчужине гидростатики».

Эксперимент назовем «стрельба по крутым и сырым яйцам». Автор отнюдь не призывает вас переводить продукты. Вполне достаточно представить себе эту ситуацию и догадаться, каковы будут результаты меткой стрельбы. Что будет, если попасть приблизительно в центр крутого яйца? Пуля пройдет навылет, оставив в яйце более или менее аккуратное отверстие. А если яйцо сырое? Вероятно, интуиция подсказывает вам, что при метком попадании оно разобьется вдребезги, как бы взорвется. И это — одно из проявлений закона Паскаля, который утверждает, что в жидких телах (в отличие от твердых) давление передается без изменения в каждую точку жидкости. Давление, оказываемое пулей на скорлупу сырого яйца в точке попадания, передается во все точки жидкости и соответственно действует изнутри на скорлупу, разрывая ее.

Возникает вопрос: а каков механизм передачи давления? Ответ на него изложен в школьном учебнике, и мы скажем по этому поводу лишь не-

сколько слов. Давление, которое оказывает сжатая жидкость на стенки сосуда, связано с тем, что молекулы непрерывно бомбардируют изнутри эти стенки. Но движение молекул в жидкости хаотическое, и поэтому они с одинаковым «усердием» бомбардируют любую стенку сосуда. Отсюда сразу следует, что закон Паскаля, раз он связан с хаотичностью теплового движения, справедлив не только для жидкостей, но и для газов.

Перейдем теперь к другому, почти столь же «хулиганскому» опыту. Поставим пустую бутылку на землю и будем бить по горлышку сверху вниз палкой, пытаясь разбить бутылку. Автор, опять-таки, не призывает вас к уничтожению стеклотары. Речь идет только о мысленном эксперименте. Предположим, что разбить бутылку вам не удалось. Не отчаивайтесь — вам поможет закон Паскаля. Наполните бутылку водой доверху и заткните пробкой. А теперь достаточно сравнительно несильно ударить по пробке — и бутылка благополучно развалится на части.

Надо сказать, что Блез Паскаль к этому эксперименту не имеет отношения. Говорят, что честь первооткрывателя такого экзотического способа разбивания бутылок принадлежит Галилео Галилею, который все это проделывал лет за 30—40 до рождения выдающегося француза. Но вот для объяснения результатов эксперимента закон Паскаля необходим.

Предположим, вы ударили по пробке с силой F_1. Давление, которое вы (точнее — палка) при ударе оказываете на пробку площадью S_1, равно

$$P_1=\frac{F_1}{S_1}.$$

Это давление передается жидкости, а жидкость передает его на боковые стенки и донышко бутылки. И если общая площадь стенок и донышка S_2, то на них будет действовать сила

$$F_2=P_1S_2=F_1\frac{S_2}{S_1}.$$

Несложный подсчет показывает, что для обычной бутылки емкостью в 1/2 литра отношение S_2/S_1 составляет по порядку величины несколько сотен. Именно во столько раз оказывается усиленным ваш удар. Естественно, что даже если бить не очень сильно, бутылке все равно не устоять.

Последняя формула, разумеется, относится не только к «бутылочному» эксперименту. Она имеет общий характер, и это прекрасно понял Паскаль. Вот что он писал в своем «Трактате о равновесии жидкостей»*):

«Если сосуд, наполненный водой и закрытый со всех сторон, имеет два отверстия, одно в 100 раз больше другого, которые прикрыты точно подогнанными к ним поршнями, то один человек, надавливающий на малый поршень, уравновесит силу 100 человек, надавливающих на поршень в 100 раз больший, и преодолеет силу 99. И каково бы ни было отношение этих отверстий, всегда, когда силы, приложенные к поршням, относятся друг к другу, как отверстия, силы эти будут в равновесии.

...Отсюда следует, что сосуд, наполненный водою, является новым принципом механики и новой машиной для увеличения сил в желаемой степени, потому что при помощи этого средства человек может поднять любую предложенную ему тяжесть».

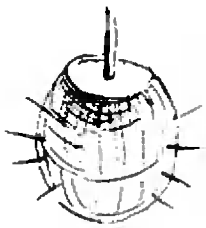
Совершенно ясно, что в этих словах полностью сформулирована идея гидравлического подъемника, гидравлического пресса, гидравлического привода тормозов современного автомобиля и многих других подобных устройств.

Рассказывая о научных достижениях Блеза Паскаля (1623—1662), невозможно не сказать хотя бы несколько слов об этой экстраординарной личности. В 16 лет он приобретает европейскую известность своей первой математической работой — трактатом о конических сечениях. И вообще период жизни с 12(!) до 23 лет безраздельно отдан математике, и Паскаль

*) *Полное название этой работы Паскаля таково:* «Трактаты о равновесии жидкостей и весе массы воздуха, содержащие объяснение причин различных явлений природы, которые до сих пор не были достаточны известны и, в частности, тех, которые приписывают боязни пустоты».

становится одним из признанных лидеров в этой области. Лишь после этого, вдохновленный работами итальянца Эванджелиста Торричелли, Паскаль начинает заниматься физикой. И снова — достижения мирового уровня. В 1651 году Паскаль резко обрывает научные занятия и со свойственной ему страстностью погружается в водоворот светской жизни. Еще через три года, испытав мистическое озарение, он внезапно обращается к религии. Ей и литературным занятиям посвящается остаток жизни.

В свой «физический» период Паскаль прославился остроумными опытами по гидростатике. Он в это время жил в Руане, и толпа в несколько сот горожан собиралась на его демонстрации как на праздничные представления. Один из самых известных опытов Паскаля, поразивший воображение жителей Руана, по идее близок к эксперименту с разбиванием бутылки. В тонкую длинную трубку, встав-



ленную в закупоренную наполненную водой бочку, наливалась вода. Уровень воды в трубке повышался, и в какой-то момент крепко сколоченная бочка разрывалась. Объяснить этот «фокус» вы теперь должны без труда.

Есть еще один интересный исторический вопрос: а действительно ли именно Паскаль является первооткрывателем «своего» закона? Мы уже упоминали Галилея, который очень близко подошел к идеям Паскаля. Более того, в 1594 году Галилей получил от Венецианского дожа патент на гидравлический пресс сроком на 20 лет. Правда, гидравлический пресс получил распространение лишь через два века.

Другим предшественником Паскаля в деле открытия законов гидростатики был голландец Симон Стевин. Водяная инженерия имела исключительное значение для Нидерландов. И не случайно именно там появился принадлежащий Стевину первый (после Архимеда) серьезный трактат по гидростатике (1585 год). Трактат был, однако, написан на малораспространенном голландском языке и не получил поэтому широкой известности.

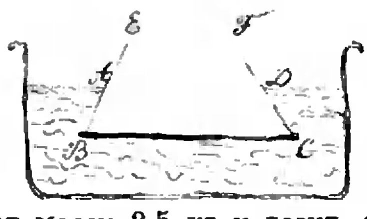
Итак, не исключено, что закон Паскаля называется именно так потому, что Галилей не придавал своим гидростатическим упражнениям достаточного внимания, а Стевин писал по-голландски. Так бывает нередко. Здесь уместно привести слова самого Паскаля из его философской работы «Мысли»:

«Говоря о своих трудах, иные авторы твердят «моя книга, мой комментарий, моя история». Они как те выскочки, которые обзавелись собственным домом и не устают повторять «мой особняк». Лучше бы говорили «наша книга, наш комментарий, наша история», ибо чаще всего там больше чужого, чем их собственного».

В заключение мы хотим предложить вам, уважаемые читатели, три гидростатические задачи:

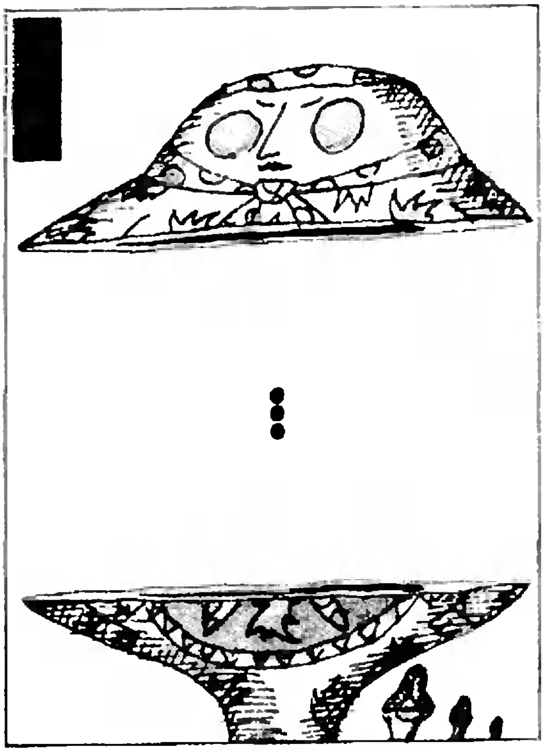
1. Предположим, что в опыте Паскаля с разрыванием бочки в бочку вставляется не одна, а две одинаковые трубки. Изменится ли давление воды в бочке? Изменится ли сила давления воды на стенки бочки?

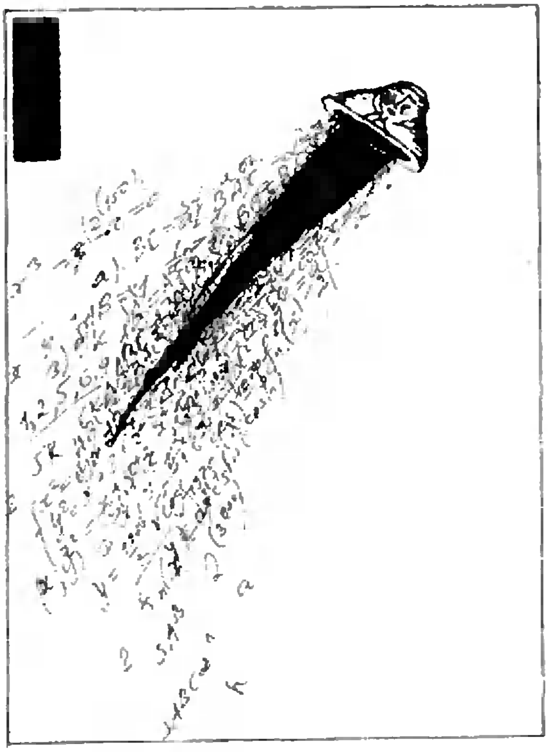
2. Сосуд $EABCDF$ (см. рисунок) с приставным дном BC опущен в резервуар с водой. Вода в объеме $ABCD$



имеет массу 2,5 кг и весит, соответственно, 24,5 Н. Если на дно BC поставить узкую гирю весом 25 Н, оно не отрывается. А если налить 2,5 кг воды, то отрывается. В чем дело?

3. В жидкости на глубине h гидростатическое давление, как известно, равно $\rho g h$. Почему это давление в соответствии с законом Паскаля не передается на поверхность?





Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Уравнения, которые удается решить

В этой заметке пойдет речь об алгебраических уравнениях вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1)$$

В школе такие уравнения решают только для значений $n \leqslant 2$. Тем не менее, в некоторых случаях удается школьными методами решить уравнения степени выше второй, применяя специальные приемы. Некоторые из них мы здесь покажем.

I. Теорема. *Пусть в уравнении (1) все коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ — целые, и пусть несократимая дробь p/q — корень этого уравнения. Тогда ее числитель p есть делитель свободного члена a_0, а ее знаменатель q есть делитель старшего коэффициента a_n.*

Доказательство. Подставим в уравнение (1) $x = p/q$. Мы получим

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Множитель p входит во все члены, кроме последнего. Но тогда и последний член делится на p, так как он равен сумме остальных членов (со знаком «минус»). Поскольку наша дробь p/q несократима, ни один множитель числа p не может быть делителем числа q. Значит, чтобы последний член $a_0 q^n$ делился на p, необходимо, чтобы свободный член a_0 делился на p. Первое утверждение теоремы доказано. Второе доказывается аналогично.

Пользуясь этой теоремой, мы можем найти все рациональные корни любого уравнения с целыми коэффициентами (если они есть). Для этого достаточно составить список всех делителей свободного члена, список всех делителей старшего коэффициента и затем перепробовать все дроби вида p/q, беря p из первого списка, а q — из второго.

II. Теперь предположим, что мы уже знаем один корень уравнения. (Сейчас неважно, как мы его узнали.) Как воспользоваться этим, чтобы найти остальные корни? Нам поможет процедура деления многочленов, похожая на процедуру деления многозначных чисел. Покажем на примере, как это делается. Пусть нам было дано уравнение

$$x^3-2x+1=0.$$

Согласно предыдущей теореме, если это уравнение и имеет рациональные корни, то только 1 или —1. Проверкой убеждаемся, что число 1 действительно является корнем.

Теперь нам нужно разложить многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители. Это можно сделать искусной группировкой членов, но существует и надежный способ, не требующий догадки: делить наш многочлен уголком на $x-1$. Как это делается, показано на рисунке 1.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^3-x^2 & x^2+x-1 \\ \cline{1-1} x^2-2x+1 & \\ x^2-x & \\ \cline{1-1} -x+1 & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Рис. 1.

В данном случае в остатке получился ноль, благодаря чему мы смело можем записать тождество

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1).$$

Но, вообще говоря, при делении многочленов получается остаток. Другой пример деления показан на рисунке 2. Здесь получился остаток 2. Это значит, что имеет место тождество

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} x^3+x^2 & x^2-x-1 \\ \cline{1-1} -x^2-2x+1 & \\ -x^2-x & \\ \cline{1-1} -x+1 & \\ -x-1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Рис. 2.

$$x^3-2x+1=(x+1)(x^2-x-1)+2.$$

Остаток — это многочлен, степень которого меньше степени делителя. В частности, если делитель — двучлен вида $x-x_0$, то остаток — число. Именно этот случай нас здесь и интересует.

Перейдем теперь к общим определениям.

Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x-x_0$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$ и такое число R, что получится тождество

$$P(x)=(x-x_0)Q(x)+R. \qquad (2)$$

Искать их можно любым способом, например делением «уголком». О том, какой получится остаток при делении на двучлен $x-x_0$, говорит следующая теорема.

Теорема Безу. *Остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-x_0$ равен $P(x_0)$. В частности, этот остаток равен нулю в том и только в том случае, когда число x_0 — корень многочлена $P(x)$.*

Доказательство. Подставим $x=x_0$ в тождество (2) и получим

$$P(x_0)=R,$$

что составляет первое утверждение теоремы. Из этого равенства мы видим, что R равно нулю, если $P(x_0)$ равно нулю, т. е. если x_0 — корень $P(x)$.

Итак, если мы знаем, что число x_0 является корнем многочлена $P(x)$, мы делим его на $x-x_0$, заранее зная (благодаря теореме Безу), что в остатке получится нуль. Тем самым, мы сводим решение данного уравнения к решению другого уравнения меньшей степени. Иногда таким путем удается решить уравнение полностью, т. е. найти все его корни.

III. Еще один прием, полезный при решении уравнений,— это замена переменных. Наиболее интересный случай — возвратные уравнения. Уравнение (1) называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на равных расстояниях от концов, равны:

$$a_{n-k}=a_k \text{ при всех } k \text{ от } 0 \text{ до } n.$$

Оказывается, что всякое возвратное

уравнение четной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени подстановкой

$$x + \frac{1}{x} = t. \qquad (3)$$

Покажем, как применить эту подстановку на примере возвратного уравнения четвертой степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Разделим его на x^2 и перепишем так:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Возведем равенство (3) в квадрат:

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

т. е.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Вводя новую переменную t, получаем квадратное уравнение

$$a(t^2 - 2) + bt + c = 0.$$

Что же касается возвратных многочленов нечетной степени, то все они делятся на $x+1$ и после такого деления дают возвратные многочлены четной степени. Покажем это на примере возвратного уравнения пятой степени

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx + a = 0.$$

Легко видеть, что $x = -1$ — корень этого уравнения, поэтому по теореме Безу многочлен в левой части уравнения делится на $x+1$. Впрочем, результат деления можно получить и группировкой членов:

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0.$$

Как известно, и x^3+1, и x^5+1 делятся на $x+1$:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1),$$
$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1).$$

И вообще, $x^{2k+1}+1$ делится на $x+1$ при любом k:

$$x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \ldots - x + 1)$$

(«плюсы» и «минусы» чередуются).

На этом мы закончим изложение теории. А чтобы научиться ее применять, решите следующие задачи.

Задачи

Решите уравнения:

1. $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0.$
2. $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0.$
3. $x^4 - \sqrt{2}\,x^3 - 2x^2 + (2\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2} = 0.$
4. $x^4 - 10x^3 + 22x^2 - 10x + 1 = 0.$
5. $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0.$
6. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

чтобы заменой

$$x + \frac{c}{x} = t$$

оно сводилось к квадратному уравнению?

А. Тоом

Задачи в стиле Заочной школы

Когда создавалась Заочная математическая школа, ныне ставшая Всесоюзной, традиция проведения олимпиад и кружковых занятий уже насчитывала десятилетия. Эта традиция, конечно, сильно помогла в создании ВЗМШ, но в то же время она не могла быть перенесена в условия заочной учебы полностью. Олимпиады всегда были нацелены на выявление способных ребят, еще не обладающих математической культурой. Типичная олимпиадная задача — это задача-орешек, требующая сообразительности, но не представляющая технических трудностей, решение которой, если уж до него додумаешься, записывается коротко и просто. Вот удачный пример олимпиадной задачи: «Докажите, что в любой треугольной пирамиде есть ребро, все четыре плоские угла прилегающие к которому — острые». Положительную оценку («плюс-минус») можно ставить уже за одну фразу: «Возьмем самое длинное ребро».

Заочная школа — это именно школа, цель которой — выработка математической культуры. В ней необходимы задачи, с точки зрения олимпиадной эстетики «некрасивые», представляющие трудности при записи решения, требующие расчетов, перебора случаев, небольшого самостоятельного исследования. Ученик ВЗМШ, имеющий месяц на выполнение очередного задания, должен этот месяц систематически работать. В Заочной школе необходимы такие задачи, которые неуместны на олимпиаде или на экзамене.

Ниже мы приводим несколько задач, характерных для ВЗМШ. Некоторые из них уже публиковались в учебных пособиях ВЗМШ, другие придуманы по их подобию.

Восьмой класс

1. а) Про два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ известно следующее: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Следует ли отсюда, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?

б) Рассмотрим задачу на построение: *постройте треугольник ABC по углу $BAC = \alpha$ и сторонам $AB = 1$ и $BC = a$.* На координатной плоскости с координатами a и α покажите области, соответствующие каждому возможному числу решений этой задачи.

2. Начертите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

3. Можно ли выбрать на плоскости четыре различные точки, не лежащие на одной прямой, так, что все расстояния между ними — целые числа?

4. Найдите четыре числа, если известно, что, складывая их попарно, мы получим следующие шесть сумм:

1, 2, 5, 6, 9, 10.

5. Существует ли такое натуральное число k, что $5k$ — пятая степень целого числа, $6k$ — шестая степень целого числа, а $7k$ — седьмая степень целого числа?

6. Существует ли такое натуральное число k, что $6k$ — шестая степень целого числа, а $8k$ — восьмая степень целого числа?

7. В свежих огурцах было 99 % воды. В процессе хранения на овощной базе произошла усушка, после которой в огурцах стало 98 % воды. На сколько процентов уменьшился вес огурцов?

8. В газетном сообщении говорилось: «В микроавтобусе приехали спортсмены. Мастеров спорта среди них более сорока двух, но менее сорока трех процентов». Может ли это сообщение быть верным, если микроавтобус вмещает десять пассажиров?

9. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на сторонах четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Может ли площадь четырехугольника $ABCD$ быть больше площади четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$?

10. Существует ли треугольник, у которого длины всех сторон, длины всех высот и радиусы вписанной и описанной окружностей — целые числа?

Девятый класс

11. Войсковая колонна имеет длину 1 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Колонна за это время прошла 1 км. Какой путь проехал связной? (Колонна движется равномерно.)

12. Две медианы прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите третью медиану.

13. Можно ли начертить на плоскости такие две замкнутые 100-звенные ломаные, что каждое ребро первой ломаной пересекает каждое ребро второй ломаной?

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z + 2, \\ y^2 = x + z + 2, \\ z^2 = x + y + 2. \end{cases}$$

15. О треугольнике ABC были сделаны следующие три утверждения:

а) треугольник ABC — прямоугольный,

б) треугольник ABC — равнобедренный,

в) в треугольнике ABC есть угол в 45°.

Известно, что только два из этих утверждений верны. Найдите углы треугольника ABC.

16. Для всех значений параметра a найдите число решений системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$$

17. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые десять членов — целые, а все следующие — не целые числа?

18. Постройте треугольник по трем медианам.

19. Постройте треугольник по трем высотам.

20. На координатной плоскости начертите множество таких точек $(x; y)$, для которых существует треугольник а) со сторонами $x, y, 1$; б) с медианами $x, y, 1$; в) с высотами $x, y, 1$.

Десятый класс

21. Начертите графики функций

а) $y = \sqrt[1970]{\log_{1970} \cos^{1970} x}$,

б) $y = \arcsin(\cos x)$,

в) $y = \cos(\arcsin x)$.

22. Что больше: $2^{3^{100}}$ или $3^{2^{150}}$?

23. Для всех значений параметра a найдите число решений уравнения $x^3 - x - a = 0$.

24. Решите уравнение

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = \frac{\pi}{2}.$$

25. Одна пирамида находится внутри другой пирамиды. Может ли площадь боковой поверхности внутренней пирамиды быть больше площади боковой поверхности внешней пирамиды?

26. Дан четырехгранный угол. Постройте плоскость, пересечение которой с данным углом — параллелограмм.

27. Существует ли многогранник, имеющий шесть граней, но не являющийся кубом, у которого все двугранные углы равны друг другу?

28. Существует ли четырехгранная пирамида $SABCD$, у которой боковые грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания?

29. Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

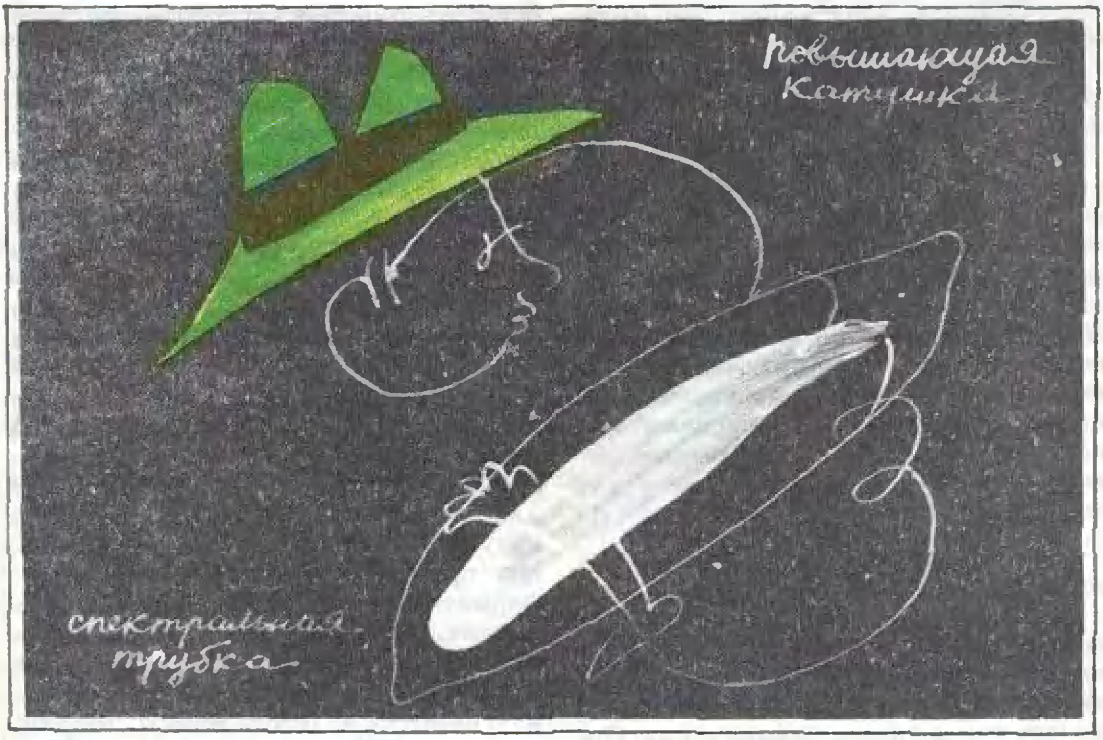
30. Определим индуктивно последовательность функций:

$$\begin{cases} f_1(x) = |x|, \\ f_{n+1}(x) = |f_n(x) - 2|. \end{cases}$$

Для любого n решите уравнение:

$$f_n(x) = 1.$$

Публикацию подготовил А. Тоом



Лаборатория „Кванта"

Опыты с высокочастотным генератором

М. ЦЫПИН

В предыдущей статье*) этого раздела журнала было рассказано об устройстве лампового генератора, позволяющего получать напряжение 3—4 тысячи вольт при частоте около 5 мегагерц. Там же описывался простой опыт со свечением неоновой лампочки, поднесенной к повышающей катушке генератора на расстояние приблизительно 10 сантиметров. Это свечение говорит о том, что напряженность электрического поля в разреженном неоне, заполняющем лампочку, вблизи генератора превышает критическое значение, при котором наступает *электрический пробой газа.*

Аналогичным образом можно вызвать электрический разряд не только в неоне. Воспользуйтесь, например, спектральными трубками из школьного набора. В него входят трубки, наполненные водородом, гелием, неоном, криптоном и т. п. Держа такую трубку за один конец, поднесите другой к повышающей катушке генератора (можно даже ввести его внутрь катушки). Свечение возникает сначала в ближайшей к генератору части трубки, а затем распространяется на всю трубку. Разряд в широкой части трубки часто имеет замысловатую форму и содержит яркие и тусклые области, которые к тому же могут перемещаться. Эти явления слишком сложны, чтобы объяснить их здесь, ими занимается физика плазмы.

Имея столь удобную возможность зажигания газоразрядных трубок, было бы очень кстати поинтересоваться

*) См. «Квант», 1989, № 12.

спектрами их излучения. Для этого можно воспользоваться спектроскопом, а можно обойтись и без него — достаточно иметь треугольную стеклянную призму.

Отойдите от светящейся трубки на расстояние 2—3 метра и посмотрите на нее сквозь призму. Призму держите непосредственно около глаза, а смотрите в сторону от нее (учитывая преломление световых лучей призмой). Найдя правильное положение, вы увидите спектр, состоящий из отдельных ярких спектральных линий. Зрелище это чрезвычайно красивое: никакие рисунки или даже цветные фотографии не идут в сравнение с наблюдаемой картиной.

Газовый разряд можно вызвать не только в спектральных трубках, а и в любых других приборах, содержащих газ при низком давлении. Это и люминесцентные лампы, и стартеры к ним, и тиратроны, и даже обычные криптоновые лампы накаливания. Поэкспериментируйте и через некоторое время вы научитесь по виду спектра узнавать состав газа в приборе.

Электрический разряд в газе часто является источником не только видимого, но и невидимого ультрафиолетового излучения. В этом отношении особенно интересен разряд у острия, которым заканчивается повышающая катушка генератора. При таком разряде наряду с излучением в синей области видимого спектра возникает такое же, если не более сильное, излучение и в ближней ультрафиолетовой области. Как же его обнаружить? Оказывается, сделать это можно, воспользовавшись любопытным свойством некоторых сортов бумаги.

Безусловно, вы замечали, что бумага иногда бывает желтой, иногда более или менее белой, а иногда совсем белой. Этой белизны часто добиваются с помощью оптического отбеливателя — органического вещества, светящегося голубым светом под действием ультрафиолетового излучения. Поскольку в естественном солнечном свете всегда есть некоторое количество ультрафиолета, эта голубизна и делает бумагу белее. Если поднести такую бумагу к горящему газовому разряду, она будет испускать довольно яркое голубое свечение, сигнализирующее о наличии ультрафиолетового излучения. Эффект становится особенно наглядным при сравнении различных сортов бумаги: некоторые светятся лучше, другие хуже, а третьи не светятся вовсе. Вырежьте какую-нибудь фигурку из светящейся бумаги, наклейте ее на кусок несветящейся, и вы получите очень удобный индикатор ультрафиолетового излучения.

Еще одна область явлений, которые можно исследовать с помощью нашего генератора, связана с переменным током. Поскольку высокое напряжение для этого не нужно, повышающую катушку лучше убрать из генератора. Мы привыкли к тому, что в трансформаторе всегда есть железный сердечник, а его обмотки содержат сотни витков. На частоте же 5 мегагерц трансформатор может иметь первичную обмотку из шести витков, вторичную — из одного и вообще не иметь сердечника. При этом трансформатор, как ни странно, работает!

Возьмите кусок изолированного провода длиной около 40 сантиметров и сделайте из него петлю, т. е. катушку из одного витка, диаметром примерно 4 сантиметра. Выводы длиной порядка 15 сантиметров скрутите между собой, подключите этот виток к лампочке от карманного фонарика и постепенно подносите виток к контурной катушке генератора. Когда виток окажется достаточно близко, лампочка загорится (и даже может перегореть). Закрепив каким-нибудь образом ваш виток, служащий вторичной обмоткой импровизированного трансформатора, вы получите удобный источник небольшого высокочастотного напряжения. С его помощью можно проделать, например, такой опыт.

Подключите виток к лампочке не непосредственно, а через дополнительный кусок тонкого провода длиной несколько десятков сантиметров. Если бы источником тока была батарейка, этот провод практически никак не повлиял бы на результат — его сопротивление слишком мало. Однако вовсе не так обстоит дело при высокой частоте, когда начинает сказываться индуктивность провода,— теперь он оказывает заметное сопротивление, которое к тому же сильно зависит от его формы.

Чем больше вы будете экспериментировать с высокочастотным генератором, тем больше у вас возникнет вопросов. Например, таких:

— Как измерить высокое высокочастотное напряжение? Можно ли для этого применить электроскоп?

— Что представляет собой спектр разряда на острие?

— Проходит ли ультрафиолетовое излучение сквозь стекло?

— Совпадает ли спектр водородной газоразрядной трубки с «теоретическим» спектром атомарного водорода?

— Как зависит индуктивность провода от его формы? При какой форме индуктивность минимальна, а при какой максимальна?

— Можно ли наблюдать резонанс, включив последовательно с лампочкой катушку и конденсатор?

Постарайтесь найти ответы на эти вопросы. А если вы сами придумаете что-нибудь такое, что будет интересно не только вам, но и другим, напишите об этом в редакцию «Кванта».

Игры и головоломки

Небольшой переполох в аптеке

(Начало см. на с. 50)

каждая пилюля с повышенной дозой лекарства тяжелее нормальной на 10 мг, то, разделив 270 на 10, мы получим 27 — число более тяжелых пилюль.

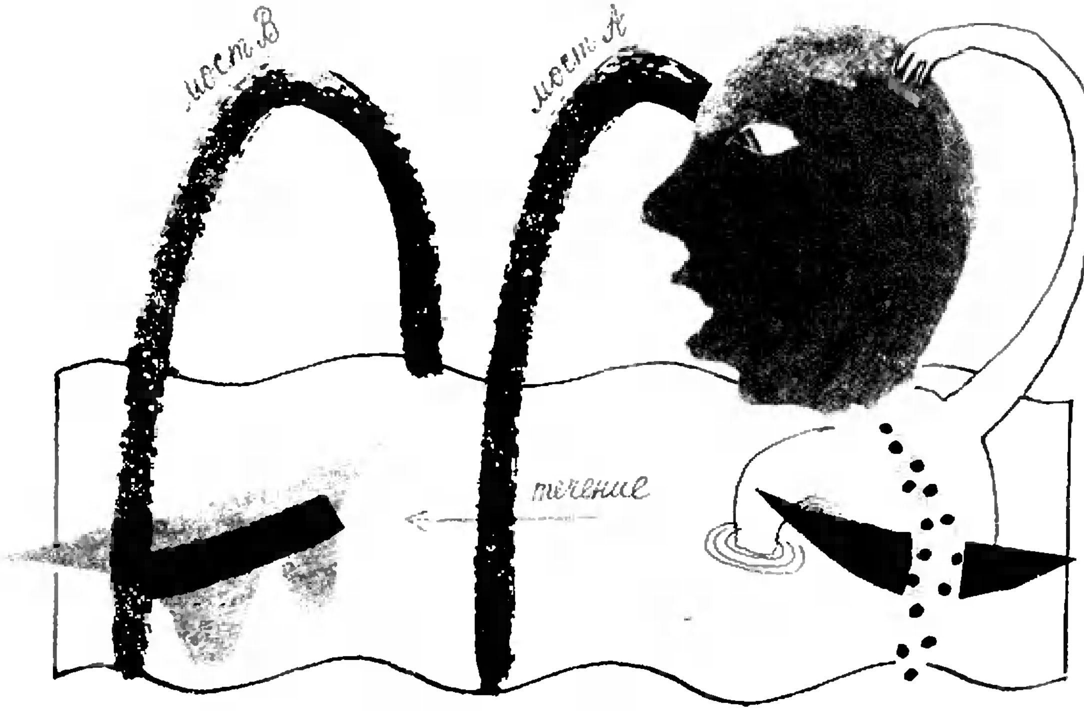
Запишем число 27 в двоичной системе: 11011. Двоичные разряды, в которых стоят единицы, говорят нам, какие степени числа 2 в сумме дают двоичное число 11 011 (или десятичное число 27): 1, 2, 8 и 16. Единицы стоят в первом, втором, четвертом и пятом двоичных разрядах. Следовательно, непригодные пилюли с повышенным содержанием лекарства находятся в первом, втором, четвертом и пятом флаконах. Почетное место отведено двоичной системе и в занимательной математике.

Вот простой карточный фокус, который позволит вам удивить и позабавить ваших друзей. Хотя внешне он ничем не напоминает задачу об отыскании флаконов с непригодными пилюлями, и задача, и фокус по существу «двоичны» — в основе их лежит двоичная система счисления.

Пусть кто-нибудь из зрителей тщательно перетасует колоду карт. Положив ее в карман, попросите вашего помощника назвать любое число от 1 до 15, после чего, сунув руку в карман, достаньте карты, значения которых в сумме равны названному числу (туз считается равным 1).

Секрет фокуса прост. Вы заранее кладете в карман туз, двойку, четверку и восьмерку. Определить на глаз недостачу четырех карт в колоде невозможно, и ваши зрители будут пребывать в уверенности, что вы попросили перетасовать полную колоду. Перетасованную колоду вы подкладываете под четыре карты, уже лежащие в кармане. После того как число названо, вы мысленно представляете его в виде суммы степеней числа 2 (например, если названо число 10, то вы мысленно разлагаете его в сумму 8+2=10) и, сунув руку в карман, достаете двойку и восьмерку.

Из книги М. Гарднера «Есть идея», М.: Мир, 1982.



Практикум абитуриента

Системы отсчета в задачах механики

Кандидат физико-математических наук
А. ЧЕРНОУЦАН

Проплывая на лодке под мостом А, рассеянный человек уронил в реку шляпу, но, не заметив этого, продолжал грести против течения. Через 15 минут, обнаружив пропажу, он развернул лодку и, гребя в том же темпе, догнал шляпу под мостом В, удаленном от моста А на 1 километр. Какова скорость течения реки?

Отнюдь не случайно разговор о системах отсчета мы начали с этой очень старой и уже ставшей классической задачи. Она наглядно иллюстрирует тот факт, что удачный выбор системы отсчета (С. О.) существенно упрощает, а иногда и делает просто устным решение многих физических задач.

И действительно, чтобы найти скорость течения в нашем примере, надо узнать, сколько времени заняло движение шляпы между мостами (поскольку скорость шляпы равна скорости воды). Перейдем в С. О., связанную со шляпой. В ней вода неподвижна, а скорость движения лодки в обоих направлениях одинакова. Значит, время движения лодки назад, к шляпе, равно времени движения от шляпы, т. е. 15 минутам. Тогда общее время между потерей и поимкой шляпы — 30 минут, и скорость течения — 1 км/0,5 ч=2 км/ч.

При переходе из одной С. О. в другую многие физические величины, описывающие механическое движение тел — например, скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$ и т. п., изменяются. При этом выполняются известные законы сложения соответствующих величин:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_{12}+\vec{v}_2,\quad \vec{a}_1=\vec{a}_{12}+\vec{a}_2.$$

Здесь $\vec{v}_1$ ($\vec{a}_1$) — скорость (ускорение) тела относительно первой С. О., $\vec{v}_{12}$ ($\vec{a}_{12}$) — скорость (ускорение) тела относительно второй С. О., $\vec{v}_2$ ($\vec{a}_2$) — скорость (ускорение) второй С. О. относительно первой.*)

Сразу заметим, что мы будем обсуждать только поступательное движение С. О. относительно друг друга.

А теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Сначала — из кинематики. Заметим сразу, что в рамках кинематики все С. О. (покоящиеся, движущиеся равномерно или ускоренно, вращающиеся и т. д.) равноправны; выбор С. О. определяется только удобством и здравым смыслом.

Задача 1. *Скорость течения реки $\vec{u}$, скорость лодки в стоячей воде $\vec{v}_{отн}$. Какой курс должен держать человек в лодке, чтобы течение снесло ее как можно меньше?*

Понятно, что здесь разумно обсуждать две С. О. Требование обеспечить наименьший снос имеет отношение к С. О., связанной с землей,— угол между скоростью лодки $\vec{v}$ и перпендикуляром к линии берега должен быть минимальным. В С. О., связанной с водой, задана величина скорости лодки $v_{отн}$ и требуется найти направление этой скорости, например — угол α между скоростью $\vec{v}_{отн}$ и перпендикуляром к линии берега. Ведь «держать курс» означает задавать направление корпуса лодки, а оно совпадает с направлением скорости лодки в той С. О., где вода неподвижна.

*) Подробнее все эти вопросы обсуждались в заметке «Относительность движения» («Квант», 1989, № 9).

В условии задачи ничего не сказано о соотношении величин u и $v_{отн}$. Рассмотрим два варианта.

1) $v_{отн} > u$. В этом случае удается обеспечить движение лодки перпендикулярно берегу (сноса нет вовсе). Запишем закон сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{u}$$

и изобразим его на рисунке 1. Из прямоугольного треугольника получаем

$$\sin\alpha = u/v_{отн}.$$

2) $v_{отн} < u$. Равенство, выражающее закон сложения скоростей, для этого случая изображено на рисунке 2. При изменении курса конец вектора $\vec{v}_{отн}$ описывает полуокружность. Минимальный угол между вектором $\vec{v}$ и перпендикуляром к линии берега соответствует условию, что этот вектор касается полуокружности. Отсюда получаем

$$\sin\alpha = v_{отн}/u.$$

Итак, при $v_{отн} > u$ $\sin\alpha = u/v_{отн}$; при $v_{отн} < u$ $\sin\alpha = v_{отн}/u$ (случай $v_{отн} = u$ разберите самостоятельно).

При рассмотрении свободного падения нескольких тел удобно использовать С. О., связанную с одним из этих тел. В ней все остальные тела будут двигаться прямолинейно и равномерно (сопротивление воздуха мы не учитываем). Этот прием часто называют «методом барона Мюнхгаузена» (вы поняли — почему?). Воспользуемся им в следующей задаче.

Задача 2. *Из двух точек, расположенных на одной высоте h над землей на расстоянии l друг от друга, одновременно бросают два камня: один вертикально вверх со скоростью v_1,*

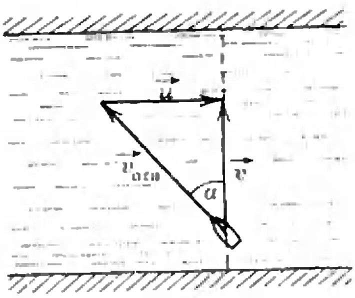


Рис. 1.

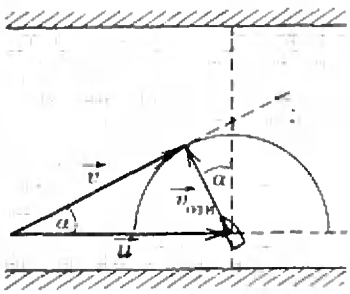


Рис. 2.

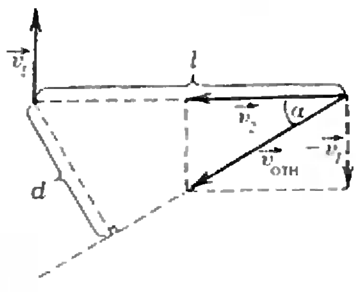


Рис. 3.

другой горизонтально со скоростью v_2. Каково минимальное расстояние между камнями в процессе движения? Начальные скорости камней лежат в одной вертикальной плоскости.

Выберем С. О., связанную с первым камнем. Тогда движение второго камня будет прямолинейным и равномерным ($\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{g} - \vec{g} = 0$) со скоростью

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Наименьшее расстояние между камнями легко найти из рисунка 3:

$$d = l\sin\alpha = \frac{lv_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Замечание. Наибольшее сближение камней произойдет через время

$$t = \frac{l\cos\alpha}{v_{\text{отн}}} = \frac{l\cos\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{lv_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Необходимо, чтобы к этому моменту первый камень не упал на землю; т. е. должно выполняться условие

$$\frac{lv_2}{v_1^2+v_2^2} \leqslant \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Может возникнуть такой вопрос: минимальное расстояние между камнями найдено нами в С. О., связанной с летящим камнем; может быть, в С. О., связанной с землей, ответ будет другим? Нет, это не так. Расстояние между двумя движущимися точками относится к так называемым инвариантным величинам, т. е. величинам, значение которых не изменяется при переходе из одной С. О. в другую. Вот примеры других инвариантных в классической механике величин: интервал времени между событиями, размеры предметов, их ориентаци в пространстве и т. д.

Перейдем теперь к задачам динамики. Здесь круг «разрешенных» С. О. резко сокращается. Так как правила действий в неинерциальных С. О. выходят за рамки школьного курса, мы вынуждены ограничиться только инерциальными С. О. В любой из них мы можем пользоваться привычными для нас законами Ньютона и законами сохранения энергии и импульса

Задача 3. *Тележка массой M и длиной l стоит на гладкой горизонтальной плоскости. На тележке находятся два человека, массы которых m_1 и m_2. На какое расстояние переместится тележка, если эти два человека поменяются местами?*

С одной стороны, нас интересует перемещение тележки относительно земли; с другой — нам известны конечные перемещения людей не относительно земли, а относительно тележки. Как же быть?

Будем считать, что движения всех тел — и людей, и тележки — равномерные, и перейдем в С. О., скорость которой равна скорости тележки $v_т$ в некоторый момент времени. Относительно этой С. О. начальная скорость всех тел равна $-v_т$. Запишем для замкнутой системы «тележка — люди» закон сохранения импульса:

$$-v_т(m_1+m_2+M) = v_{1\,\text{отн}}m_1 + v_{2\,\text{отн}}m_2.$$

Домножив это уравнение на Δt, найдем связь между соответствующими перемещениями:

$$s_т(m_1+m_2+M) = -s_{1\,\text{отн}}m_1 - s_{2\,\text{отн}}m_2.$$

Очевидно, такая же связь будет и между полными перемещениями за все время движения. Учитывая, что $s_{1\,\text{отн}} = l$ и $s_{2\,\text{отн}} = -l$, получаем

$$s_т = \frac{m_2 l - m_1 l}{m_1+m_2+M} = l\,\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+M}.$$

Эта задача легко решается также в С. О., связанной с центром масс системы (убедитесь в этом самостоятельно)*). Напомним, что координаты и скорость центра масс находятся по формулам

$$x_ц = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

$$\vec{v}_ц = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Из второго равенства видно, что, если система тел замкнута, скорость центра масс остается постоянной. Поэтому С. О., связанная с центром масс замкнутой системы, является инерциаль-

*) О свойствах центра масс можно подробнее узнать, например, из заметки «Что такое центр масс» («Квант», 1988, № 3).

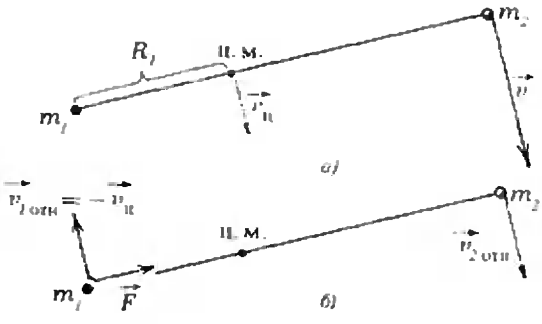


Рис. 4.

ной. Полный импульс системы тел в этой С. О. в любой момент равен нулю.

Воспользуемся С. О., связанной с центром масс, для решения следующей задачи.

З а д а ч а 4. *По гладкой горизонтальной плоскости движутся два маленьких тела, связанные невесомой и нерастяжимой нитью длиной l. В некоторый момент времени тело массой m_1 покоится, а тело массой m_2 имеет скорость v, направленную перпендикулярно нити (рис. 4, а). Найдите натяжение нити в этот момент.*

Центр масс данной системы тел находится на нити на расстоянии $R_1 = m_2 l/(m_1+m_2)$ от первого тела и движется относительно плоскости со скоростью $v_ц = m_2 v/(m_1+m_2)$. Выберем С. О., в которой центр масс покоится. В ней тела m_1 и m_2 совершают равномерное движение по окружностям вокруг неподвижного центра масс (рис. 4, б), при этом скорость первого тела относительно этой С. О. равна по величине $v_ц$.

Согласно второму закону Ньютона, сила натяжения нити, действующая на первое тело, равна

$$F = m_1 \frac{v_ц^2}{R_1}.$$

Откуда, подставляя выражения для R_1 и $v_ц$, находим окончательно

$$F = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1+m_2)\,l}.$$

Во многих случаях при переходе в С. О., связанную с центром масс, решение задачи настолько упрощается, что имеет смысл сначала перевести все данные задачи в эту С. О. и получить результат, а потом вернуться в исходную С. О. В качестве примера рассмотрим две задачи об абсолютно упругом ударе шаров.

З а д а ч а 5. *Два шара с массами m_1 и m_2, движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно, испытывают абсолютно упругий лобовой удар. Каковы будут скорости шаров после удара?*

В С. О., связанной с центром масс, полный импульс шаров равен нулю как до, так и после удара. Легко догадаться, что оба закона сохранения — импульса и энергии — будут выполняться, если просто поменять направления скоростей шаров на противоположные. Запишем соответствующие формулы:

начальные скорости шаров в С. О. центра масс равны

$$u_1 = v_1 - v_ц = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2}, \quad u_2 = \frac{m_1(v_2-v_1)}{m_1+m_2};$$

конечные скорости шаров в С. О. центра масс —

$$u_1' = -u_1, \quad u_2' = -u_2;$$

конечные скорости шаров относительно земли есть

$$v_1' = u_1' + v_ц = -\frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2} +$$

$$+ \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1-m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1+m_2},$$

$$v_2' = u_2' + v_ц = \frac{(m_2-m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1+m_2}.$$

В качестве последнего примера рассмотрим задачу о нецентральном упругом ударе.

З а д а ч а 6. *Шар массой m_1 налетает со скоростью v_1 на покоящийся шар массой m_2 ($m_2 < m_1$). На какой максимальный угол может отклониться шар m_1 при ударе? Шары абсолютно упругие и гладкие.*

В С. О. центра масс (рис. 5) шары сближаются со скоростями

$$\vec u_1 = \vec v_1 - \vec v_ц = \vec v_1 - \frac{m_1 \vec v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2 \vec v_1}{m_1+m_2},$$

$$\vec u_2 = -\frac{m_1 \vec v_1}{m_1+m_2},$$

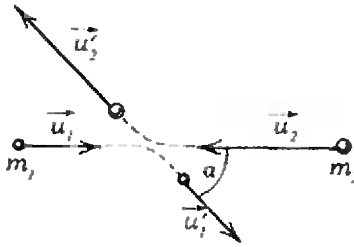


Рис. 5.

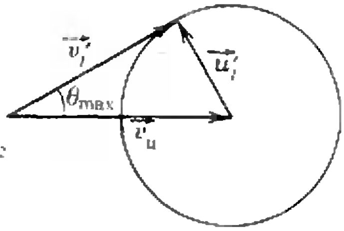


Рис. 6.

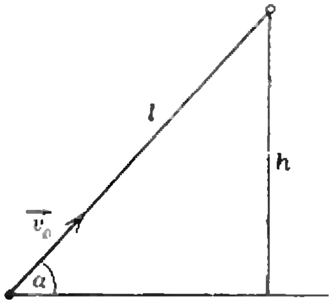


Рис. 7.

при этом

$$m_1\vec{u}_1 = -m_2\vec{u}_2.$$

В результате нецентрального удара скорости шаров сохранят прежние значения и опять будут направлены противоположно друг другу:

$$u_1' = u_1,\ u_2' = u_2,\ m_1\vec{u}_1' = -m_2\vec{u}_2'.$$

Однако вектор конечной скорости первого шара $\vec{u}_1'$ будет повернут относительно вектора его начальной скорости на некоторый угол α. В зависимости от взаимного расположения шаров в момент удара этот угол может изменяться от нуля (легкое касание шаров) до 180° (лобовой удар). Возможные положения конца вектора $\vec{u}_1'$ лежат на окружности радиусом u_1 (рис. 6). Конечная скорость первого шара относительно земли равна $\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{v}_ц$. Максимальный угол между векторами $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_ц$ получается в том случае, когда вектор $\vec{v}_1'$ касается окружности.

Отсюда находим искомый угол θ_{max}:

$$\sin\theta_{max} = \frac{u_1}{v_ц} = \frac{m_2 v_1}{m_1+m_2} : \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\theta_{max} = \arcsin(m_2/m_1).$$

Упражнения

1. В тот момент, когда начинается свободное падение тела, человек бросает камень, стремясь попасть в падающее тело. Какой должна быть для этого начальная скорость камня (угол с горизонтом и модуль), если тело перед падением находилось на высоте h и на расстоянии l от человека (рис. 7)?

2. Маленький грузик подвешен на нити длиной l. С какой скоростью надо перемещать точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы грузик совершил полный оборот?

3. Упругая гладкая стена движется со скоростью v_1. Навстречу стене летит упругий шар, скорость которого перед ударом равна v_2 и перпендикулярна стене. Найдите скорость шара сразу после удара о стену.

4. Притягиваясь по закону всемирного тяготения, две звезды движутся по круговым орбитам, оставаясь все время на расстоянии l друг от друга. Найдите период вращения такой двойной звезды, если ее масса равна M.

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$4|\cos x|+3=4\sin^2 x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\leqslant 0.$$

3. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN=3$, а угол M равен $120°$. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найдите площадь треугольника KLN.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y+\log_y x=\dfrac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1. \end{cases}$$

5. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL=1$, $PQ=3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

6. Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиусом $\sqrt{10}$?

2. Решите уравнение

$$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33.$$

3. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

4. Решите неравенство

$$1\leqslant|\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4\pi a}\right)-\sqrt{(x-5a+10\pi-34)\cdot(|\pi-x|-a+\pi+2)}=0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

6. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC. Точка O, являющаяся серединой высоты SH, находится на одинаковом расстоянии от точки S, точки E, лежащей на ребре SA, и точки F, лежащей на ребре SB. Известно, что $SH=8$, $AB=16\sqrt{2}$, $EF=8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше $30°$, а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x-\sin x=\sqrt{8}\cos 3x.$$

2. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

3. Решите уравнение

$$\log_2(x+4)+2\log_2\sqrt{x}=5.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме пирамиды.

5. При каких значениях m уравнение

$$(2x)^2-4x(m3^m)^{\frac{1}{2}}+3^{m+1}+m-3=0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях m?

6. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D, N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD,

2) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x}{x+1}<1.$$

2. Последовательность чисел b_1, b_2, b_3, ... является геометрической прогрессией. Известно, что $b_1\cdot b_3\cdot b_{11}=8$. Найдите $b_2\cdot b_8$.

3. Решите уравнение

$$\log_2(3\cos x-\sin x)+\log_2(\sin x)=0.$$

4. В прямоугольнике $LMNK$ диагонали LN и MK пересекаются в точке O. Треугольники MON и $MO'N$ симметричны относительно общей стороны MN. Угол MON в два раза больше, чем угол $LO'K$. Найдите стороны прямоугольника $LMNK$, если известно, что площадь пятиугольника $LMO'NK$ равна $5\sqrt{3}$.

5. Решите уравнение

$$(2x+1)(1+\sqrt{(2x+1)^2+7})+x(1+\sqrt{x^2+7})=0.$$

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{49}(2x^2+x-5)+\log_{\frac{1}{7}}(1+x)=0.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{2x^3-9x^2+12x+1}$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant 3$.

3. Решите уравнение

$$\sin x(3\sin 2x\cdot\sin^3 x+12\sin 2x\cdot\sin x-16\cos x)+2\sin 4x=0.$$

4. В окружность радиусом 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA<KF$ и $KA=\sqrt{11}-1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN=2$), а угол NFH — тупой. Найдите угол HKF.

5. Числа x, y, z таковы, что

$$x^2+3y^2+z^2=2.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$2x+y-z?$$

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos^2 x-2\sin 2x\cos 2x-\sqrt{3}\sin^2 x=0.$$

2. Автобус проехал первую часть пути из пункта A в пункт $Б$, расстояние между которыми 370 км, со скоростью 80 км/ч, а на второй части пути вынужден был снизить скорость до 40 км/ч из-за ремонта дороги. На обратном пути из $Б$ в A скорость на ремонтируемом участке дороги составляла 30 км/ч, а на остальной части пути — 90 км/ч. Известно, что обратный путь из $Б$ в A автобус проехал на 25 минут быстрее, чем из A в $Б$. Найдите время движения по маршруту из A в $Б$.

3. Решите неравенство

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+1)\leqslant 2.$$

4. Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 12, а длина стороны AD равна 5. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Найдите отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник AED, к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC.

5. Решите неравенство

$$\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos 2x+3\cos^2 \pi x)\geqslant -2.$$

Вариант 7
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от A, по горной дороге со скоростью 6 км/ч поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения из пункта B. Найдите скорость автобуса на подъеме, если известно, что она в два раза меньше его скорости на спуске.

3. Решите неравенство

$$\log_{10-x^2}\left(\frac{16}{5}x-x^2\right)<1.$$

4. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A, а прямых BC и CD в точке C. Найдите площадь сферы, если известно, что $AB=1$, $BD=2$, $\angle ABC=\angle BAD=90°$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD=2$, $\angle ABD=\angle ACD=90°$, и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC.

Вариант 8
(геологический факультет)

1. Определите, какое из чисел больше:

$$2\log_2 5 \text{ или } 3\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{23}.$$

2. Решите неравенство

$$x\leqslant\frac{2}{x+1}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{|\cos x|}{\cos x}=\cos 2x-1$$

на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$.

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, CD — биссектриса, $AD=2\sqrt{3}$. Найдите BC, если известно, что $DM=\sqrt{3}$, где DM — высота треугольника ADC.

5. В сосуде находилось 9 кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по весу отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по весу раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в 9/4 раз по сравнению с исходным количеством. Определите первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a^2+8a+16)(2-2\cos x-\sin^2 x)+$$
$$+(32+2a^2+16a)(\cos x-1)+3a+10=0$$

не имеет решений.

Вариант 9
(экономический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2-2x-8}}.$$

2. Вычислите

$$\frac{\log_3 42}{\log_{126} 3}-\frac{\log_3 378}{\log_{14} 3}.$$

3. Решите уравнение

$$|x+1+|-x-3||-6=x.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(3\sin x)=-1,$$

удовлетворяющее условию $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$.

5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найдите величину угла ACB, если $CE=1$, $BE=CD=4$, $AD:BD=4:1$.

6. Решите уравнение в целых числах

$$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+x^2+2y^2+18xy+5x+$$
$$+7y+6=0.$$

Вариант 10
(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$x+3<\frac{1}{x+1}.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\left|\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right|=3\cos x+1.$$

3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\log_x 8+3y=24, \\ -2(\log_x 0{,}5)^3+y=8. \end{cases}$$

4. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая — сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат, соответственно, на сторонах MN и PQ, причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ, если $NP=b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

5. При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства

$$x+2a-\sqrt{3ax+4a^2}>0.$$

Вариант 11
(отделение прикладной социологии философского факультета)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-5x+4}{5-x}>0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}(11+x)=2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}+2).$$

3. До приближающегося Ахиллеса оставалось еще 6 м, когда черепаха поняла, что ей не уйти от погони, и она обреченно остановилась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, если ее скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ними за время погони сократилось в 9 раз и их движение происходило по одной прямой?

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y(x)=\frac{3}{4}|x|-x^3$$

на отрезке $[-0{,}7;\ +0{,}7]$.

5. Найдите все пары значений (α, β), при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 8x+(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,y=4, \\ (\alpha-\beta)\,x+26y=2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Вариант 12
(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2+x}>1+2x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{2x+2}(2x^2-8x+6)=2.$$

4. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем угол CDA равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $OC=2$, $OD=\sqrt{3}$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $x+y+z=x^2+4y^2$ и $x+2y+3z=a$.

Физика

Физический факультет

1. Двигатель запускаемого с земли реактивного снаряда массой m работает время τ, создавая постоянную по величине и направлению силу тяги F и обеспечивая прямолинейное движение снаряда под углом α к горизонту. Определите высоту, на которой прекращается работа двигателя. Изменением массы снаряда и сопротивлением воздуха пренебречь.

2. В одном из двух одинаковых заполненных водой цилиндрических сообщающихся сосудов плавает шарик (рис. 1). Масса шарика m, плотность воды ρ, сечение каждого сосуда (площадь дна) S. На сколько изменится уровень воды, если вынуть шарик?

3. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью, находится маленькая шайба с прикрепленной к ней нитью (рис. 2). Другой конец нити закреплен в некоторой точке наклонной плоскости. Если

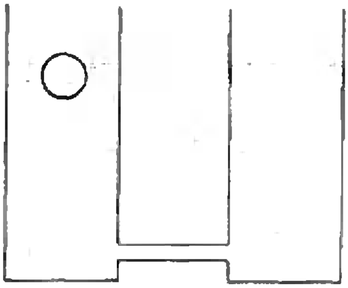


Рис. 1.

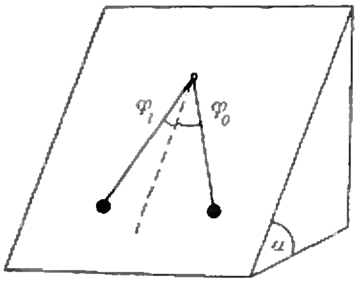


Рис. 2.

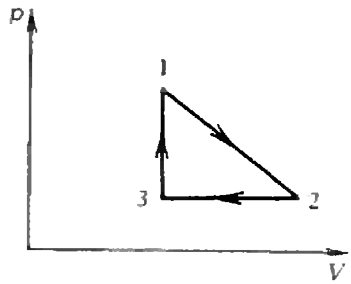


Рис. 3.

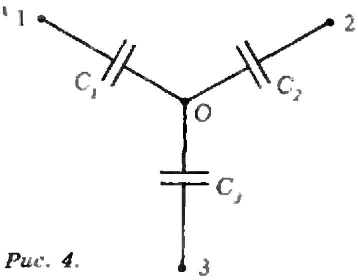


Рис. 4.

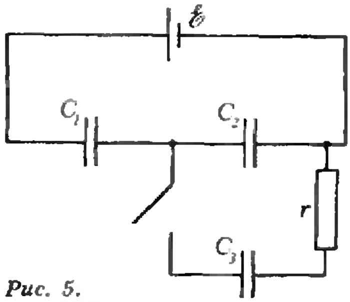


Рис. 5.

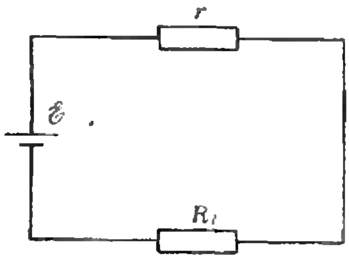


Рис. 6.

шайбу отклонить (при натянутой нити) от положения равновесия на малый угол φ_0 и отпустить (без начальной скорости), то в процессе колебаний максимальный угол отклонения шайбы в противоположном направлении будет равен φ_1 ($\varphi_1<\varphi_0$). Найдите коэффициент трения шайбы о плоскость. Размерами шайбы пренебречь, силу трения считать не зависящей от скорости.

4. Идеальный газ расширяется из состояния *1* в состояние *2* (рис. 3), увеличивая свой объем в 2 раза. При этом давление изменяется по линейному закону, а температура в состоянии 2 оказывается равной температуре в состоянии *1*. Затем газ изобарически сжимается до исходного объема, переходя в состояние *3*. Из состояния *3* газ изохорически переводится в исходное состояние *1*. Какую работу совершает 1 моль газа за рассмотренный цикл, если его температура в состоянии *1* равна T?

5. В баллоне емкостью $V=3$ л находится воздух с относительной влажностью $r_1=60$ % при температуре $t_1=17$ °С. Какой будет влажность воздуха, если в баллон добавить $m=1$ г воды, а температуру повысить до $t_2=100$ °С? Давление насыщенных паров при температуре t_1 равно $p_{н1}=2$ кПа.

6. В схеме, изображенной на рисунке 4, известны потенциалы точек *1*, *2* и *3* и емкости конденсаторов C_1, C_2 и C_3. Найдите потенциал точки O. Потенциалы со временем не меняются, предварительно все конденсаторы были разряжены.

7. Конденсаторы C_1 и C_2 последовательно подключены к источнику постоянного напряжения (рис. 5). После зарядки конденсаторов к конденсатору C_2 через резистор r подключают конденсатор C_3. Какое количество теплоты выделится на резисторе в процессе зарядки конденсатора C_3? Емкости всех трех конденсаторов одинаковы и равны C. ЭДС источника $\mathscr{E}$.

8. К источнику постоянного напряжения через резистор r подключен резистор R_1 (рис. 6). При этом на нем выделяется мощность P_1. Если вместо резистора R_1 включить резистор R_2, то на нем выделяется мощность P_2. Чему равна ЭДС источника? Сопротивления резисторов R_1 и R_2 известны, сопротивление резистора r неизвестно.

9. На стеклянную призму с показателем преломления n в плоскости ABC на сторону AB падает луч света (рис. 7). Преломляющий угол призмы $\alpha=90°$. Угол падения равен φ. Луч выходит из призмы, преломившись на стороне BC. На какой угол отклоняется луч в результате прохождения через призму?

10. Точечный источник света расположен на оси собирающей линзы. За линзой находится диафрагма с диаметром отверстия $d_1=1$ см. Оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости диафрагмы и проходит через центр отверстия диафрагмы. За диафрагмой на расстоянии $l=10$ см находится экран, на котором образуется световое пятно диаметром $d_2=0{,}5$ см. В отверстие диафрагмы вставляется тонкая рассеивающая линза, при этом на экране образуется световая точка. Чему равно фокусное расстояние рассеивающей линзы?

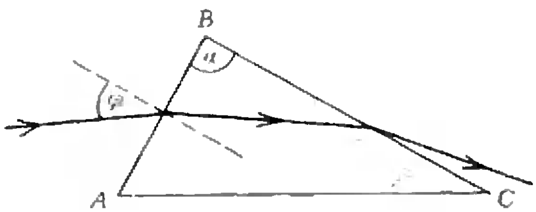


Рис. 7.

Публикацию подготовили
Д. Денисов, М. Потапов, В. Прошкин,
И. Сергеев, А. Соколихин

Информация

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ на заочное отделение. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно заполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая 1990 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Закончившие 9-й или 10-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ. Учащиеся, успешно выдачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечание

Для школьников 8—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1990 году

1. На праздничном фейерверке запустили 2 ракеты с интервалом 6 минут. Через t минут после своего старта первая ракета находится на высоте $h_1(t)=100\sqrt[3]{t}$ метров, а вторая — на высоте $h_2(t)=100\sqrt{t}$ метров. Какая ракета будет находиться выше через 5 минут после старта второй ракеты?

2. Найдите такую точку M внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, чтобы сумма $MA+MB+MC+MD$ была минимальной.

3. Найдите все целые положительные x и y, удовлетворяющие уравнению $xy-3x-5y=0$.

4. Постройте треугольник с помощью циркуля и линейки без делений, если известны, т. е. изображены на листе бумаги, следующие элементы: отрезок, равный стороне этого треугольника, отрезок, равный высоте, опущенной на эту сторону, и угол, равный углу между этой высотой и одной из оставшихся сторон.

5. Пусть неотрицательные числа x, y и z связаны соотношением $x+y+z=1$. Докажите, что $xy+yz+zx\leqslant\frac{1}{3}$.

6. Длины сторон прямоугольного треугольника равны x, $2kx$ и $3k^2x$. Найдите все возможные k.

7. На столе стоит 1990 коробок, в которых лежат шарики: в одной коробке — один, в другой — два, в третьей — три, и так далее до 1990. Разрешается производить следующую операцию: из любых двух коробок высыпаются все шарики, скажем, m и n, $m\geqslant n$, после чего в одну из этих двух коробок кладется $m-n$ шариков, а в другую — $2(m-n)$. Можно ли, повторив операцию достаточное количество раз, добиться, чтобы все коробки были пусты.

8. На 2 вакантных места в совете отряда имелось 4 кандидата: Петя, Коля, Сережа и Таня. Выборы были тайными: на пионерском сборе были розданы бюллетени с 4 фамилиями и каждый пионер вычеркнул 2 фамилии. По итогам голосования Петя набрал больше всех голосов — 8, а Коля меньше всех — 5. Сколько пионеров было на сборе?

9. На арену цирка, имеющую форму круга радиуса 7 метров, выбежали 7 клоунов. Обязательно ли расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит 7 метров?

10. При каких a уравнения $x^3+2ax^2+2x+1=0$ и $x^4+(2a+1)x^3+(2a+2)x^2+4x+3=0$ имеют общий корень?

Прием на экспериментальное отделение ВЗМШ «Языки и литература»

Отделение принимает учащихся 7-х, 8-х и 9-х классов общеобразовательных школ (за исключением проживающих в Москве и Ленинграде).

Цель отделения «Языки и литература» — выработать навыки самостоятельного анализа языковых явлений и литературных фактов, ознакомить на практике с основными направлениями современной филологии, в том числе с математической и структурно-прикладной лингвистикой и информатикой, помочь профессиональной ориентации учащихся.

Успешно окончившим отделение «Языки и литература» выдаются удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ на отделение «Языки и литература» необходимо выполнить вступительную работу. Не обязательно ответить на все вопросы, иногда достаточно оригинального выполнения трех-четырех заданий, чтобы быть зачисленным.

Задачи

1. Даны зулусские слова (зулусский — язык коренного населения Южно-Африканской Республики), заимствованные из европейских языков:
pikiniki, pulezidenti, palagilafu, siginali, Tilansivali, kilasi, gilamu, pulani, asipilini, apendikisi, palafini, balikoni.

З а д а н и е 1. Определите, что могут означать эти слова.

З а д а н и е 2. Установите, как будут выглядеть в зулусской передаче английские слова clinic (больница), tram (трамвай), box (коробка), film (фильм), mandarin (мандарин).

П р и м е ч а н и е. Зулусские слова записаны упрощенно: без начального грамматического показателя.

2. Даны венгерские существительные и *все* их переводы на русский язык (в перепутанном порядке):
nyírfa, körte, almák, körtefa, nyírfák, alma, almafa
береза, груша, яблоня, яблоко, березы, яблоки

З а д а н и е. Установите правильные переводы. Объясните свое решение.

П р и м е ч а н и е. ö — особый гласный звук венгерского языка; знак ′ над гласной обозначает ее долготу.

3. В сербскохорватском языке ударение бывает четырех типов — два типа с восходящим движением тона (знаки ̀ и ́) и два типа с нисходящим движением тона (знаки ̏ и ̑). Ниже приведены некоторые сербскохорватские и соответствующие им русские слова:

мухо̀ловка — мухоловка
веретѐно — веретено
мȇд — мёд
бро̑д — брод
беспо̀вратно — бесповоротно
мра̏з — мороз
кро̏тки — кроткий
седо̀бради — седобородый
бро̏да — брода (р. п.)
бра́да — борода
гово̀рити — говорить
красо̀та — красота
бра̑в — боров
зла̑то — золото
бла̏то — болото
бе̏зумни — безумный
ву̏чица — волчица
бу̏ха — блоха
ту̑сти — толстый
вла́кно — волокно
сла̏би — слабый

З а д а н и е 1. Переведите на сербскохорватский язык: город, голова, безголовый, голорукий, колода, золоторогий, сестра, волк, глотать, грех, верв.

З а д а н и е 2. Переведите на русский язык (проставив ударения в русских переводах): вра̑на, вѐдро, ве̏дро, о̀брезати, за̀мка, не̏бо, но̏ски.

4. Даны грузинские слова с переводами на русский язык:

mravalsauḳunovani — многовековой
ṭomi — том
ṭiraži — тираж
didṭiražiani — многотиражный
saukune — столетие
didmnišvnelovani — многозначительный
saxe — вид
mravalsaxovani — многообразный
ǯaxi — семья
mravalṭomiani — многотомный
atasi — тысяча

З а д а н и е 1. Переведите на грузинский язык слова: многосемейный, многотысячный.

З а д а н и е 2. Что означают грузинские слова didi и mravali?

З а д а н и е 3. Переведите слово kmariani (слово kmari означает «муж»).

5. Дана запись некоторых чисел на языке гуси (африканский язык, на котором говорят в Кении):

57 — emerongo etano na itano na ibere
82 — emerongo etano na etato na ibere
230 — amagana abere na emerongo etato
308 — amagana atato na itano na itato
705 — amagana atano na abere na itano

З а д а н и е. Запишите на языке гуси числа 28 и 837.

6. Даны предложения итальянского языка и их переводы на русский язык:

Mi lavo — Я моюсь
Ti calzi — Ты обуваешься
Ti pettiniamo — Мы причесываем тебя
Ci calzate — Вы обуваете нас
Posso pettinarmi — Я могу причесаться
Lavateci — Вымойте нас
Vi calzo — Я обуваю вас

З а д а н и е. Переведите на итальянский язык следующие предложения:

Причешитесь
Ты моешь нас
Мы можем обуть тебя

7. Решите смысловые пропорции:

$$\frac{\text{ОТЕЦ}}{\text{БАБУШКА}} = \frac{?}{\text{МАТЬ}}$$

$$\frac{\text{СВАТАТЬСЯ}}{\text{ЖЕНА}} = \frac{?}{\text{ГОСТЬ}}$$

$$\frac{\text{АТЕЛЬЕ}}{\text{ШИТЬ}} = \frac{\text{БОЛЬНИЦА}}{?}$$

$$\frac{\text{ИДТИ}}{\text{ВОДИТЬ}} = \frac{\text{ДВИГАТЬСЯ}}{?} = \frac{?}{\text{КЛАСТЬ}}$$

8. Ваш любимый литературный жанр? Аргументируйте свое предпочтение: достоинства данного жанра по сравнению с другими, формальные особенности, содержательные возможности. Какие известные вам произведения написаны в этом жанре?

9. Чем отличается поэзия от прозы? Является ли различие непреодолимым?

10. Как бы вы объяснили, что такое эпос, эпопея, эпический дух, орфоэпия? Попытайтесь восстановить, какой смысл вкладывали в слово έπος древние греки.

Примечание. Не забудьте, что прежде, чем оперировать каким-либо понятием («повесть», «лирика», «эпос» и т. д.), надо оговорить, какое содержание вы в него вкладываете (сформулировать определение самостоятельно или с помощью словаря).

11. Как вы представляете себе «точные методы» в литературоведении?

12. Какие области научного знания вы считаете смежными с лингвистикой? Что может дать человеку наука о языке?

Задания 1—6 предлагались в разные годы на олимпиадах по лингвистике и математике, которые проводятся регулярно с 1965 года на базе отделения структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ, а с 1989 года — совместно тремя вузами: Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Московским государственным историко-архивным институтом и Московским государственным институтом иностранных языков им. Мориса Тореза.

Задания необходимо выполнять на русском языке в ученической тетради не более 18 листов. Эта тетрадь высылается простой бандеролью. Не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область						Московская					
Фамилия, имя ученика						Иванов Петр					
Год рождения						1974					
Класс и школа						7 кл. «Б» школы № 2					
Фамилия, имя, отчество учителя русского языка и литературы						Орлова Мария Михайловна					
Место работы и должность родителей						Отец — шофер автобазы № 3 Мать — медсестра					
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)						141456 Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Отвечать на вопросы надо в том порядке, в каком они стоят в задании: сначала вопросы, потом ответ.

В тетрадь вложите два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным вашим почтовым адресом, фамилией и именем, а также полностью надписанный почтовый конверт.

Срок отправки вступительной работы — *не позднее 1 мая 1990 года* (по почтовому штемпелю). Если вы успешно выполните вступительную работу, то, начиная с сентября 1990 года, будете получать задания по языкознанию и литературоведению, которые содержат теоретический материал и вопросы для самостоятельной работы, а также контрольные работы. Задания по языкознанию опираются на опыт проведения олимпиад по лингвистике и математике. В течение года предусмотрено три контрольных работы по каждому предмету. Все самостоятельные и контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями заочной школы — студентами, аспирантами и преподавателями филологического факультета МГУ.

Отмечаем особо, что обучение в заочной школе не дает никаких преимуществ при поступлении на факультет.

Вступительную работу надо выслать по адресу:

119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ; на конверте в левом верхнем углу надо обязательно пометить: «Языки и литература».

Дорогие читатели!

К нам в редакцию поступают многочисленные жалобы по поводу несвоевременной доставки номеров подписчикам. Эти срывы происходят не по нашей вине. Чеховский полиграфкомбинат, который печатает журнал, в результате перегрузки не всегда соблюдает график выпуска номеров. Свою лепту вносит и Министерство связи СССР, которое не обеспечивает своевременную доставку вышедших номеров, а в 1989 году вообще сорвало доставку ряда номеров нашим подписчикам.

Выражаем сожаление и надеемся, что в 1990 году оснований для претензий по подобным поводам у вас не будет.

Редакция

Ответы, указания, решения

[redacted] раз о законе Паскаля

1. При вставлении в бочку второй трубки ничего не изменится.

2. Сила давления снизу на приставное дно BC равна весу водяного столба в форме цилиндра с основанием BC и высотой h. Из-за формы сосуда вес этого столба больше, чем 25 Н. Поэтому под тяжестью гири приставное дно не отрывается. Когда же налита вода, силы давления сверху и снизу одинаковы, и дно отрывается под действием собственной тяжести.

3. Противоречие разрешается, если рассмотреть механизм передачи давления по Паскалю. Сжимая внешней силой жидкость, мы увеличиваем ее плотность, и возникают упругие силы, препятствующие дальнейшему уплотнению. Они же вызывают давление на соседний слой, которое и передается по жидкости. Сила же гидростатического давления скомпенсирована весом вышележащего столба жидкости и аналогичным образом передаваться не может.

[redacted]емы отсчета в задачах механики

1. $\alpha=\arcsin(h/l)$; $v_0\geqslant l\sqrt{g/(2h)}$.

2. $v_{\min}=\sqrt{5gl}$.

3. $v_2'=v_2+2v_1$.

4. $T=2\pi l\sqrt{l/(GM)}$.

[redacted]ковский государственный университет М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Указание. Сделайте замену $|\cos x|=t$.

2. $\left[1-\sqrt{3},\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right)$. Указание. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} 1-\sqrt{3}\leqslant x<\dfrac{5}{2}, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Числитель дроби равен нулю и меняет знак при $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, знаменатель — при $x=2$. Вне отрезка $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant 2$ числитель и знаменатель имеют разные знаки.

3. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника KLN (см. рис. 1). Радиусы OL и ON перпендикулярны касательным LM и MN соответственно, а угол LON между ними равен 60°. Поэтому треугольник OLN — правильный, а из перпендикулярности OL и KN следует, что KM — биссектриса угла LNO. Следовательно, высота треугольника KLN, опущенная на известную его сторону KN, равна $\dfrac{1}{2}LO=\dfrac{1}{2}KN\times$ $\times\operatorname{tg}30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\left\{\dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{81}\right\}$. Указание. В первом уравнении выполните замену $z=\log_a x$.

5. $\dfrac{36}{11\sqrt{11}}\pi$. Решение. Прямоугольник $KLMN$ касается сторонами шара, поэтому $KLMN$ — квадрат. Из равенства отрезков касательных, проведенных к шару из одной точки, следует, что треугольники KPL и MQN — равнобедренные. Пусть Q_1 и P_1 — середины их оснований KL и MN соответственно (это точки касания сферы, см. рис. 2), тогда точки Q, P, Q_1, P_1 лежат в плоскости, перпендикулярной MN и плоскости $MNKL$, поэтому центр шара лежит в плоскости QPQ_1P_1. Задача сводится к вычислению радиуса окружности, описанной около треугольника P_1SQ_1, где S — точка касания шара с отрезком PQ.

Пусть A, B, F точки касания шара с отрезками KP, NQ, KN соответственно, а H — точка пересечения продолжения сторон KP и NQ трапеции $KPQN$ ($KN\parallel QP\parallel P_1Q_1$). По свойству отрезков касательных имеем:

$$KA=NB=FN=KF=\frac{1}{2},$$

$$HA=HB,\ HN=HK,\ HP=HQ$$

(последнее равенство — следствие параллельности KN и PQ).

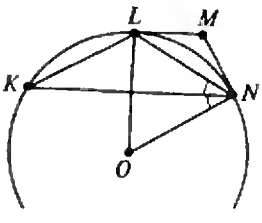


Рис. 1.

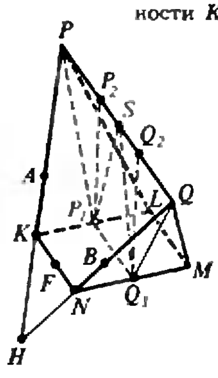


Рис. 2.

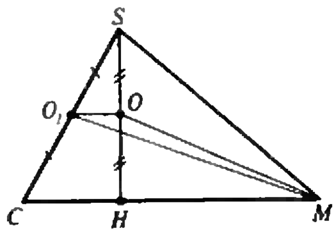


Рис. 3.

$$AP = QB = SP = SQ = \frac{3}{2},$$

$$KP = NQ = 2.$$

Пусть $Q_1Q_2 \perp PQ$, $P_1P_2 \perp PQ$, тогда $QQ_2 = PP_2 = 1$. По теореме Пифагора найдем последовательно из треугольников NQ_1Q, Q_1Q_2Q, Q_1Q_2S длины отрезков QQ_1, Q_1Q_2, $SQ_1 = SP_1$, и нам останется только найти радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника P_1SQ_1, у которого

$$SQ_1 = SP_1 = \sqrt{3},$$
$$Q_1P_1 = 1.$$

Получим $R = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

6. $-\sqrt{\dfrac{7}{5}}$. Указание. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно z, запишите его дискриминант. Затем из всех возможных x, для которых дискриминант неотрицателен, выберите наименьшее.

Вариант 2

1. Можно. Указание. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{3}$, а $\sqrt[4]{10} > \sqrt{3}$.

2. 1/2. Указание. Выполните замену $y = \sqrt{3 + 4x - 4x^2}$.

3. 48 мин. Указание. Пусть C — точка между A и B, в которой одновременно оказались все три путешественника, $s_1 = AC$, $s_0 = CB$, u, v, w — скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно, x — искомое время. Тогда, по условию

$$\frac{s_0}{u} = \frac{s_0}{v} + x = \frac{s_0}{w} = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}}.$$

Кроме того,

$$\frac{s_1}{u} = \frac{s_1}{v} + 2 = \frac{s_1}{w} + \frac{5}{2},$$

так что

$$\frac{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}{\frac{1}{u} - \frac{1}{w}} = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5}.$$

4. $x = 3/2$; $-\dfrac{\pi}{3} + \pi k < x < -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $\dfrac{\pi}{4} + \pi k < x < \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$

Указание. Неравенство имеет вид $u^v \geqslant 1$, где u и v — некоторые функции, причем $|u| \leqslant 1$. Это, вообще говоря, значит, что $v \leqslant 0$ (в нашем случае $|u| \neq 1$). Так что приходим к неравенству

$$\sqrt{2x-3}\,\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}\,|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right) \leqslant 0,$$

причем следует учесть ограничения $|\cos x| \neq 0$, $|\cos x| \neq 1$, $\cos^2 x > \dfrac{1}{2}$.

Далее, заметив решение $x = 3/2$ и сократив на положительный множитель (при $x > 3/2$), придем к неравенству, решая которое, удобно сделать замену $|\cos x| = t$ $(0 < t < 1)$.

5. $2\pi - 8$, $2\pi - 1$, 2π. Указание. Пусть $|x-2| = t$. Тогда знаменатель выражения, стоящего под знаком логарифма, имеет вид

$$f(t) = -t^2 - 2(a - 2\pi)t + 4\pi a + 4.$$

Функция f принимает свое наибольшее значение при $t = 2\pi - a$, и это значение равно $a^2 + 4\pi^2 + 4$. Поэтому дробь под знаком логарифма не меньше 1 и, значит, всегда логарифм не положителен. Отсюда следует, что (следует учесть неотрицательность корня) оба слагаемых равны нулю. Это возможно только при выполнении следующих условий: $|x-2| = 2\pi - a$ и $x - 5a + 10\pi - 34 = 0$, либо $|x-2| = 2\pi - a$ и $|x-\pi| - a + \pi + 2 = 0$. Решать полученные системы удобнее всего, исключив предварительно a.

6. $\dfrac{8(2\sqrt{2}-1)}{7}$. Решение.

1. На первом этапе мы докажем, что точки H и C совпадают. Для этого рассмотрим сечение SCM (см. рис. 3). Пусть O_1 — середина SC. У треугольников SMC и SMH общий угол M, общая сторона SM и $MC \geqslant MH$. Поэтому $O_1M \geqslant OM$ (угол O_1OM — тупой) и, значит, $OM \leqslant 4\sqrt{13}$. Но тогда $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} \leqslant 8\sqrt{3}$ и потому $\operatorname{tg}\angle SMH = \dfrac{SH}{HM} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и, следовательно, $\angle SMH \geqslant 30^\circ$. Но это значит, что $\angle SMH = 30^\circ$ и $CH = HM$, т. е. $C = H$.

2. Рассмотрим пирамиду $SCAB$. Пусть $CB = a$, $AC = b$. Так как медиана $CM = 8\sqrt{3}$ (см. рис. 4), имеем

$$2(a^2 + b^2) = AB^2 + (2CM)^2 = 16^2 \cdot 5. \qquad (1)$$

Поскольку точка O одинаково удалена от точек E и F, причем каждое из этих расстояний равно половине SC, отрезки CF и CE перпендикулярны ребрам SB и SA соответственно. Следовательно, $\triangle SCB \sim \triangle SFC$ и $\triangle SCE \sim \triangle SCA$. Поэтому $SF \cdot SB = SC^2 = SA \cdot SF$. Отсюда следует, что $\triangle SFE \sim \triangle ASB$ и

$$\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SA}.$$

Так как $SB = \sqrt{a^2 + 8^2}$, $SA = \sqrt{b^2 + 8^2}$, $SE = \dfrac{8^2}{\sqrt{8^2 + b^2}}$, $SF = \dfrac{8^2}{\sqrt{8^2 + a^2}}$, получаем

$$EF^2 = AB^2\,\frac{SE \cdot SF}{SB \cdot SA} = \frac{8^4 \cdot 16^2 \cdot 2}{(a^2 + 8^2)(b^2 + 8^2)}. \qquad (2)$$

Таким образом, a и b удовлетворяют системам уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2^7 \cdot 5, \\ (8^2 + a^2)(8^2 + b^2) = 2^{14} \cdot 5. \end{cases}$$

Выполнив замену $x = a^2 + 8^2$, $y = b^2 + 8^2$, приведем ее к виду

$$\begin{cases} x+y=2^8\cdot 3, \\ xy=2^{14}\cdot 5, \end{cases}$$

откуда $a=8$, $b=24$ или, что с точностью до обозначений то же самое, $a=24$, $b=8$. Итак, будем считать, что $a=8$, $b=24$. 3. Для определения радиуса r вписанной сферы воспользуемся равенствами $V=\frac{1}{3}rS$, где V — объем, а S — полная поверхность пирамиды. Для вычисления полной поверхности удобно заметить (это легко доказать с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора), что треугольник ABC — прямоугольный:

$$BC^2+AB^2=8^2+16^2\cdot 2=24^2=AC^2 \text{ (угол } ABC=90^\circ).$$

Треугольник SBA — тоже прямоугольный по теореме о трех перпендикулярах ($AB\perp BC$ и потому $AB\perp SB$). Дальнейшие вычисления труда не представляют.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

2. $\sqrt{\frac{2s\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$.

3. 4.

4. $\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{15})}{10}$. *Указание.* Пусть a — апофема пирамиды. Рассмотрите сечение, проходящее через высоту и апофему. Задача сводится к нахождению радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник со сторонами a, a и $2a\sqrt{\frac{3}{5}}$.

5. $m=0$ и $m\geqslant 3$. $x=0$ при $m=0$, $x=9/2$ при $m=3$. Оба корня положительны при $m>3$. *Указание.* Выполнив замену $y=2x$, запишите условие неотрицательности дискриминанта полученного уравнения.

6. 1) $\sqrt{rR}$; 2) $\sqrt{\frac{r}{R}}$. *Решение.* Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (см. рис. 5), $\angle AO_1C=2\alpha$, $\angle AO_2D=2\beta$, ρ — искомый радиус. Тогда $\angle ACD=\alpha$, $\angle ADC=\beta$, $AC=2R\sin\alpha$, $AD=2R\sin\beta$. По теореме синусов для треугольника ACD: $\frac{AC}{\sin\beta}=2\rho$, $\frac{AD}{\sin\alpha}=2\rho$. Из этих равенств получим $\rho^2=R\cdot r$, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{r}{R}}$. Пусть высоты треугольников ANC и AND, опущенные из точки N, равны h_1 и h_2 соответственно. Из равенства $CN=ND$ (оно следует из теоремы о квадрате касательной: $CN^2=NB\cdot NA=ND^2$), сразу получаем $\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{r}{R}}$.

Вариант 4

1. $(-1;\ 1)$.

2. 4.

3. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. $MN=2\sqrt{3}$, $NK=2$. *Указание.* Из равенства $\angle LOK=2\angle LO'K$ (рис. 6) следует, что точка O' лежит на окружности с центром O, описанной около прямоугольника $LMNK$. Далее докажите, что $\angle KMN=\frac{\pi}{6}$.

5. $-1/3$. *Указание.* Пусть $f(t)=t(1+\sqrt{t^2+7})$. Тогда уравнение приводится к виду $f(2x+1)=-f(x)$. Из нечетности функции f и ее возрастания (убедитесь) следует, что оно равносильно уравнению $2x+1=-x$.

Вариант 5

1. 3.

2. 0,1.

3. $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. *Указание.* После раскрытия скобок и несложных преобразований приходим к уравнению $\sin 2x\times\times(3\sin^4 x+4\sin^2 x-1)=0$.

4. $\arcsin\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{77}}{28}$. *Указание.* Воспользуемся тем, что $\angle NKF=\angle OKF-\angle OKH$ (см. рис. 7: точка O и отрезок AF лежат по разные стороны от прямой KH). Кроме того, если точки V и W — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на отрезки KH и KF, то, последовательно применяя теорему Пифагора для имеющихся прямоугольных треугольников, находим $OW=\sqrt{7}/2$, дальнейшее ясно.

5. $\sqrt{32}/3$. *Указание.* Пусть $t=2x+y-z$. Выражая z через x, y, и t, приходим к уравнению, квадратному относительно y:

$$4y^2+2(2x-t)y+5x^2+t^2-2-4xt=0.$$

Для существования решений этого уравнения необходимо выполнение условия неотрицательности его дискриминанта, или, после вычислений, условие

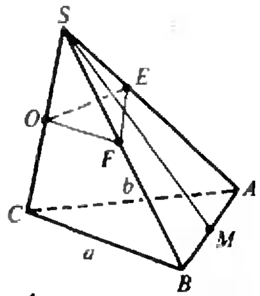


Рис. 4.

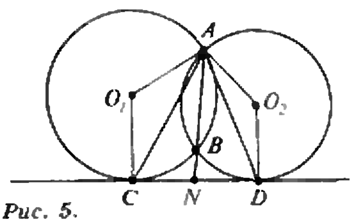


Рис. 5.

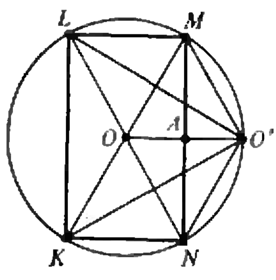


Рис. 6.

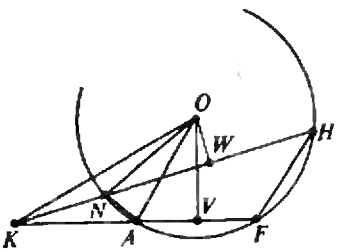


Рис. 7.

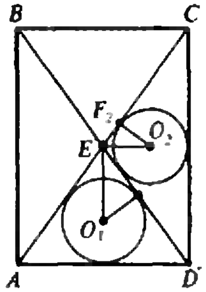


Рис. 8.

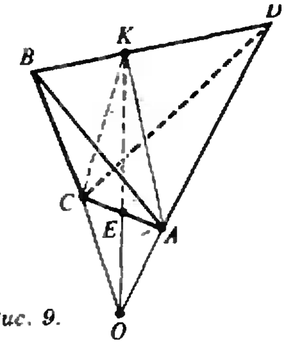


Рис. 9.

$$16x^2-12xt+3t^2-8\leqslant 0.$$

Для того чтобы данное неравенство имело решение, в свою очередь, необходима неотрицательность его дискриминанта, что приводит к неравенству $12t^2\leqslant 128$.

Вариант 6

1. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду

$$\cos 2x(\sqrt{3}-2\sin 2x)=0.$$

2. 4 ч. 45 мин.

3. $(-1{,}0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1{,}5]$.

4. $\frac{10}{3}$. Решение. Обозначим O_1 и O_2 центры вписанных окружностей, и пусть O_1F_1 и O_2F_2 — радиусы этих окружностей, проведенные в точки касания F_1 и F_2 сторон DE и EC (см. рис. 8). Из подобия треугольников DAB, EF_2O_2, O_1F_1E следует, что

$$\frac{EO_1}{EO_2}=\frac{O_1F_1}{EF_2}=\frac{O_1F_1}{O_2F_2}\cdot\frac{O_2F_2}{EF_2}=\frac{O_1F_1}{O_2F_2}\cdot\frac{AB}{AD}.$$

Треугольники AED и DEC имеют равные площади $S_1=S_2$, поэтому

$$\frac{O_1F_1}{O_2F_2}=\frac{2S_1/P_1}{2S_2/P_2}=\frac{P_2}{P_1},$$

где $P_1=18$ и $P_2=25$ — периметры этих треугольников.

5. $\frac{1}{2}$. Указание. Поскольку $x-x^2-\frac{5}{4}\leqslant -1$ и $\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos 2x+3\cos^2\pi x)=\log_{\sqrt{3}}(3+3\cos^2\pi x)\geqslant 2$, равенство в обоих случаях одновременно выполняется только при $x=\frac{1}{2}$.

Вариант 7

1. $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

2. 15 км/ч.

3. $(0;3)\cup\left(\frac{25}{8};\sqrt{10}\right)$.

4. 6π. Решение. Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к сфере, следует, что треугольники ABD и CBD равны и расположены так, что их высоты, опущенные из вершин A и C на общую сторону BD попадают в одну точку K (рис. 9). Тогда плоскость KAC, перпендикулярная BD, содержит центр O сферы. Используя теорему Пифагора и соотношения, вытекающие из подобия треугольников, последовательно вычисляем: $AD=\sqrt{3}$, $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC=\sqrt{2}$, $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $KE=\frac{1}{2}$, $OA=\sqrt{\frac{3}{2}}$ — радиус сферы.

5. $\sqrt{3}$. Решение. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности с диаметром AD, поэтому

$$BC=AD\sin\alpha=2\sin\alpha,$$

где $\alpha=\angle BAC$. Так как $\angle AED=\angle AFD=180^\circ-\frac{90^\circ}{2}=135^\circ$, то точки A, E, F, D, где E и F — точки пересечения биссектрис треугольников ABD и ACD (рис. 10), также лежат на некоторой окружности радиусом R. Отсюда следует, что

$$AD=2R\sin 135^\circ=2,$$
$$EF=2R\sin\angle EAF=\sqrt{2},$$

т. е. $R=\sqrt{2}$, $\sin\angle EAF=\frac{1}{2}$. Но $\angle EAF=\left(\alpha-\frac{1}{2}\angle BAD\right)+\frac{1}{2}(\angle BAD-\alpha)=\frac{\alpha}{2}$, и следовательно, $\alpha=60^\circ$.

Вариант 8

1. Первое число больше.

2. $(-\infty;-2]\cup(-1;1]$.

3. $\frac{5\pi}{4}$.

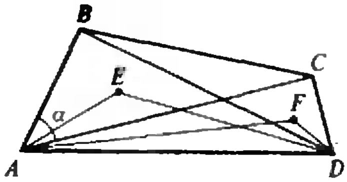


Рис. 10.

4. $\sqrt{3}+1$. Указание. Воспользуйтесь тем, что треугольник CMD — равнобедренный.
5. 6 кг.
6. $(-\infty; -10/3) \cup (-3; -2)$. Указание. Выполните замену $t=\cos x$ и затем выясните, при каких a полученное уравнение не имеет корней на промежутке $t\in[-1; 1]$.

Вариант 9

1. $[-5; -2) \cup (4; 5]$.
2. 2.
3. $[-4; 2]$.
4. $\pi+\arcsin\frac{\pi}{12}$, $\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}$.
5. $\pi-\arccos\frac{\sqrt{15}}{20}$. Указание. Пусть $BD=x$, тогда $AD=4x$, а так как $AB\cdot DB=CB\cdot EB$, получаем уравнение $(4x+x)x=20$, т. е. $x=2$. Далее из теоремы косинусов находим $\cos\angle DBC=\frac{13}{20}$, из ΔABC находим $AC=2\sqrt{15}$. И, наконец, из ΔABC находим $\cos\angle ACB=$ $=-\frac{\sqrt{15}}{20}$.
6. $\{(-2; 0); (0; -2); (-3; 0); (-1; 2)\}$. Указание. Решая данное уравнение как квадратное относительно x, получаем две возможности: $x=-\frac{y+2}{3y+1}$ или $x=-\frac{2y+3}{3y+1}$. Остается найти такие целые y, при которых x будет целым числом.

Вариант 10

1. $(-\infty; -2-\sqrt{2}) \cup (-1; -2+\sqrt{2})$.
2. $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $n\in Z$. Указание. Приведите уравнение к виду $|y|=6y$, где $y=3\cos x+1$.
3. $(2; 6)$, $\left(\frac{1}{2}; 10\right)$. Указание. Выполните замену $z=\log_x 2$.
4. $b+p$. Решение. Пусть P_1 и P_2 — периметры четырехугольников $BAQM$ и $ABNP$ соответственно. Тогда, учитывая равенство отрезков касательных к окружностям, проведенных из одной точки, имеем

$$AB=\frac{1}{2}P_2-b,\ MQ=\frac{1}{2}P_1-AB.$$

Результат не зависит от расположения отрезка AB (рис. 11).
5. $\varnothing$ при $a<0$; $\left[-\frac{4a}{3}; -a\right] \cup (0; \infty)$ при $a>0$; $(0; \infty)$ при $a=0$. Решение. При $a<0$ в области допустимых значений $x\left(x\leqslant-\frac{4a}{3}\right)$ не выполняется необходимое условие неравенства: $x+2a>0$. При $a\geqslant0$ ответ получается как пересечение области определения $\left(x\geqslant-\frac{4a}{3}>-2a\right)$ и решения неравенства $(x+2a)^2>3ax+4a^2$. При $a=0$ неравенство имеет вид $x>0$.

Вариант 11

1. $(-\infty; 1) \cup (4; 5)$.
2. $\frac{5}{4}$.
3. 3 м.
4. 0. Указание. Функция положительна на данном промежутке при $x<0$ и при $x>0$.
5. $(6; 2)$, $(-2; 6)$. Решение. Исключив y из системы, получим уравнение

$$\left(8-\frac{\alpha-\beta}{26}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\right)x=4-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{13},$$

которое имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 8-\frac{\alpha-\beta}{26}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=0, \\ 4-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{13}=0. \end{cases}$$

Вариант 12

1. $-\frac{\pi}{3}\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $k\in Z$.
2. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Указание. Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2x^2+x\geqslant0, \\ 1+2x<0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x^2+x>(1+2x)^2, \\ 1+2x\geqslant0. \end{cases}$$

3. $\sqrt{17}-4$. Указание. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2x^2-8x+6=(2x+2)^2, \\ 2x+2>0, \\ 2x+2\neq1. \end{cases}$$

4. $2\sqrt{21}-9$. Решение. Пусть r — искомый радиус окружности, O_1 — ее центр, M — точка касания окружности с отрезком OC. Тогда (рис. 12) $OO_1=2-r$, $\angle O_1DA=\angle O_1DM=\frac{\pi}{3}$; наконец (теорема косинусов),

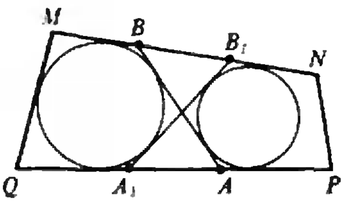


Рис. 11.

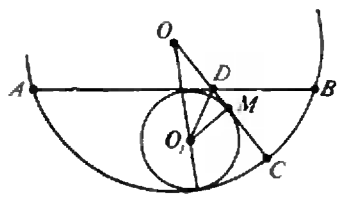


Рис. 12.

$OO_1^2=OD^2+O_1D^2-2\cdot\ OD\cdot\ O_1D\cdot\ \cos\angle ODO_1$, где $\angle ODO_1=\dfrac{2\pi}{3}$, дает уравнение для r, при решении которого надо учесть, что $r\geqslant 0$.

5. $-\dfrac{17}{48}$. Решение. Из второго равенства получаем

$$z=\frac{a}{3}-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3},$$

с учетом этого из первого получаем уравнение

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2y-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{a}{3}+\frac{17}{144},$$

правая часть которого должна быть равна нулю.

Физика

1. $h=\dfrac{g\tau^2}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{F}{mg}\right)^2-\cos^2\alpha}-\sin\alpha\right)\sin\alpha.$
2. $\Delta h=m/(2\rho S)$.
3. $\mu=\dfrac{\cos\varphi_1-\cos\varphi_0}{\sin\varphi_1+\sin\varphi_0}\operatorname{tg}\alpha\approx\dfrac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$
4. $A=RT/4$.
5. $r_2=\dfrac{p_{н1}T_2}{p_{н1}T_1}r_1+\dfrac{mRT_2}{\mu Vp_{н2}}\approx 58\ \%$

(здесь $p_{н2}\approx 10^5$ Па, $\mu=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль).

6. $\varphi_0=(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3)/(C_1+C_2+C_3)$.
7. $Q=C\mathcal{E}^2/12$.
8. $\mathcal{E}=\dfrac{R_2-R_1}{\sqrt{R_2/P_2}-\sqrt{R_1/P_1}}$.
9. $\delta=\varphi-\pi/2+\arcsin\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}$.
10. $F=-ld_1/d_2=-20$ см.

[redacted]нт» для младших школьников [redacted]«Квант» № 1)

1. Да, был.
2. Первую и третью девочку.
3. Пусть a и b — искомые числа. Тогда $a-b=n$ и $a=nb$. Отсюда $b(n-1)=n$ или $b=\dfrac{n}{n-1}=1+\dfrac{1}{n-1}$.

Так как b — натуральное, то $n=2$, $b=2$ и $a=4$.

4. См. рис. 13.
5. 11 оборотов.

К	О	Р	А	Н
Н	Р	А	К	О
А	К	О	Н	Р
О	А	Н	Р	К
Р	Н	К	О	А

Рис. 13.

[redacted]анные задачи Ленинградской городской [redacted]матической олимпиады 1989 года
(см. «Квант» № 1)

1. Решение единственно — это числа 166667 и 333334.
2. Выигрывает второй игрок. Его стратегия такова: отвечать на симметричное относительно центра доски поле другим знаком, за исключением тех случаев, когда есть прямо выигрывающий ход.
3. После вычитания второго уравнения из первого получаем $(A-B)^2+(B-C)^2=0$, откуда вытекает, что есть два решения $A=B=C=\pm 10$.
4. Если у нашего числа есть простые делители, большие 3, то оно не меньше 3000. Но уже число $2^{11}=2048$, очевидно, удовлетворяет требованиям задачи. Значит, искомое число не больше 2048 и не может иметь делителей, больших 3. Поэтому его надо искать среди чисел вида $2^k\cdot 3^l$.
5. Количество физиков за столом равно количеству лжецов, а оно четно.
6. Второй ставит фишку в симметричное относительно центра доски поле. Докажите (это чисто геометрический факт), что его ход всегда длиннее предыдущего хода первого игрока.
7. Рассмотрим любой набор из различных натуральных чисел, например 1, 2, ..., 100. Умножим все числа на одно и то же число A, делящееся на все возможные суммы пятерок чисел нашего набора. Получим, например, набор 500!, 2·500!, 3·500!, ..., 100·500! — проверьте, что это и есть требуемый набор.
8. Пусть $B-K=k$. Тогда $A^2+1=(A+k)\times\times(A-k)+k^2+1$, и значит, k^2+1 делится на B, т. е. $k^2+1\geqslant B$, или $k^2\geqslant B-1>A$ (случай $B=A+1$ по условию не возможен).
9. Так как $x+y+z=0$ и $xy+xz+yz=0$, то $(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2=0$, т. е. $x=y=z=0$, что невозможно.
10. а) 2; б) 2 или 3. Очевидно, что 2 участника могли провести подобный турнир. Рассмотрим теперь победителя турнира — он набрал не более $k(n-1)$ очков (если всего n участников). Все остальные набрали не менее $k(n-1)(n-2)/2$ очков. С другой стороны, если знаменатель прогрессии равен q, то победитель должен набрать более чем в $q-1$ раз больше очков, чем все остальные участники. Отсюда следует общий результат: если k не делится на 7, то $n=2$; если k делится на 7, то $n=2$ или 3.
11. Обратите внимание на то, что все пять треугольников, расположенных в вершинах звезды,— это подобные равнобедренные треугольники.
12. Ответ положительный. Доказательство легко проводится индукцией для всех таблиц вида $2n\times 2n$.
13. Рассмотрите грани, примыкающие к самому короткому боковому ребру.
14. Используя свойства операции $*$, получаем $(c*a)*b=-b*(c*a)=-(b*c)*a=a*(b*c)==(a*b)*c=-c*(a*b)=-(c*a)*b$. Отсюда следует, что $x*y$ всегда равно 0.
15. Обозначим центр описанной около BMC окружности через O. Докажите, что $ABOC$ — вписанный четырехугольник. Отсюда нетрудно

вывести, что AM — биссектриса угла BAC, а BM — биссектриса угла ABC.

16. Этот факт доказывается индукцией по n. Легко видеть, что на самом деле верны гораздо более сильные оценки для указанной суммы.

17. Сумма всех чисел в таблице равна $k^2(k^2+1)/2$ и должна делиться на наименьшую из указанных степеней двойки, которая не меньше $k(k+1)/2$. Легко проверяется, что k должно быть четным, и, значит, $k^2/2$ должно делиться на число, не меньшее $k(k+1)/2$ — противоречие.

18. Допустим, что этого не произойдет. Так как в любой момент есть полностью занятые фишками строки и столбец, т. е. крест одного цвета, то в самом начале этот крест — белый, а в конце — черный. Но за одно перекрашивание цвет креста измениться не может.

19. Обратите внимание на то, что $1^2+8^2=4^2+7^2$, т. е. два прямоугольных треугольника с катетами 1, 8 и 4, 7 имеют одинаковые гипотенузы и из них можно сложить четырехугольник.

20. а) Стратегия первого игрока здесь очень проста — прибавлять единицу. б) Начало игры может идти по двум путям: $2\to3\to4\to5\to6\to\ldots$ или $2\to3\to4\to6\to\ldots$, причем именно первый игрок определяет начало. В одном случае число 6 получает первый игрок, а в другом случае — второй.

21. Да, удается. Пусть P — множество образов точки O, в которой стоит профессор Смит, при всевозможных композициях отражений в зеркалах; P_1 — множество, которое получается из P при гомотетии с коэффициентом $1/2$ с центром O; Q — множество точек из P_1, не входящих в P. Любую точку из Q можно получить отражениями в зеркалах одной из конечного множества точек комнаты (их, включая точки на сторонах и в вершинах квадрата, не более 15) — в них и нужно расставить студентов.

22. Используйте то, что число 9999999 делится на 239.

23. Воспользуйтесь неравенством
$$(1-x)(1-z^2)+(1-y)(1-x^2)+(1-z)(1-y^2)\geqslant0.$$

24. Докажите, что функция
$$f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))$$
выпукла вверх на отрезке $[0;\pi]$ и значит, на этом отрезке ровно 2 корня уравнения: 0 и некоторое число a. Отсюда следует, что всего у уравнения три корня: $0, a, -a$.

25. После k нажатий можно из числа A получить любое натуральное число из промежутка $]2^k(a-1);\ 2^ka]$. Докажите, что при достаточно больших k в этом промежутке обязательно есть пятая степень.

Номер подготовили:
А. Буздин, А. Виленкин, А. Егоров, Л. Кардасевич,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников, В. Тихомироаа

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
И. Смирнова, Л. Тишков, П. Чернуский,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов
Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией Л. Чернова
Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 27.11.89. Подписано к печати 10.01.90.
Т—06407 Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,94. Тираж 170627 экз.
Заказ 2679. Цена 45 коп.

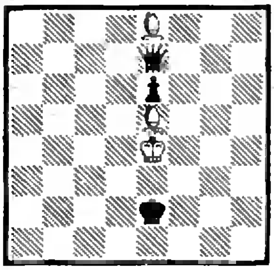
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

МАКСИМУММЕР

Раздел сказочных шахмат, с которым мы сегодня познакомимся, тесно связан с геометрией. В задаче-максимуммере одна из сторон обязана делать самые длинные ходы (геометрически — по прямой, соединяющей центры полей). Чаще всего это требование предъявляется черным в задачах на обратный мат, когда белые вынуждают черных объявить мат белому королю.

Первая диаграмма принадлежит классику сказочных шахмат, причем на ней представлены сразу две задачи.



Т. Доусон, 1920 г.

а) Обратный мат в 5 ходов (максимуммер).

б) То же задание, но с белой пешкой e3 вместо слона e5.

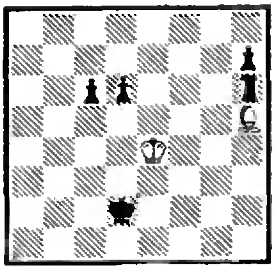
Все фигуры выстроились на одной вертикали и кажется, что должны существовать два симметричных решения. Однако слева на доске «лишняя» вертикаль, и решение единственное.

а) **1. Cd6! Фh4+.** Не 1...Фa7, потому что длина хода Фe7—a7 равна 4, а ход Фe7—h4 длиннее: $3^2+3^2>4^2$. **2. Cf4 Фd8 3. Ce5 Фd1.** Теперь ход по прямой длиннее. **4. Kpf4 Фd8 5. Cd7! Фh4×.**

В случае симметричного 1. Cf6 Фa3 2. Cd4 Фf8 3. Ce5 черный ферзь идет на a3, и комбинация разваливается.

б) **1. Kpf4 Фa3 2. Cb5+ Фd3 3. e4 Ф:b5 4. e5 Фe8 5. Kpe4 Фa4×.** Легко убедиться, что не ведет к цели симметричное 1. Kpd4.

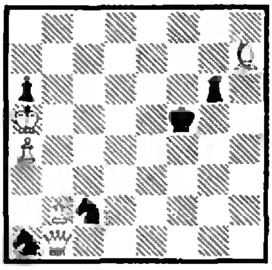
Вот еще два классических примера на тему максимуммера, иллюстрирующие четкие геометрические маневры, неожиданные перестроения фигур и хитроумное сооружение матовой сети.



К. Фабель, 1938 г.

Обратный мат в 9 ходов (максимуммер).

1. Cg6! Лh1 2. Kpd4 Лa1 3. Cb1! Вынуждает черную ладью сменить еще один угол. **3...Лa8 4. Ca2! Лh8 5. Cg8!** Ладья заперта. **5...h5 6. Ce6.** Ладья выпускается из заточения и направляется на линию «h». **6...Лa8 7. Cc8 Лa1 8. Ca6 Лh1 9. Cf1 Лb4×.** Изящная дуэль ладьи и слона.



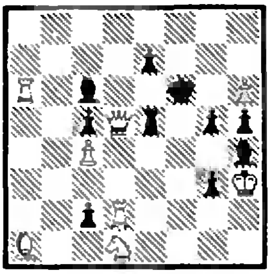
Ф. Палатц, 1925 г.

Обратный мат в 5 ходов (максимуммер).

После хода Ka1—b3 белый король заматован. Но как заставить черных пойти этим конем? **1. Cg8! Лg1** (или 1...Лb6 — ход той же длины) **2. Ca2 Лg8 (Лh6) 3. Фh1 Лg1 (Лb6) 4. Фh7+ Лg6 5. Cb1!** Все фигуры черных, кроме коня a1, «запатованы», остается **5...Kb3×.**

Как видите, задачи-максимуммеры — это самые настоящие головоломки!

В заключение рассмотрим несколько задач-максимуммеров современных авторов.

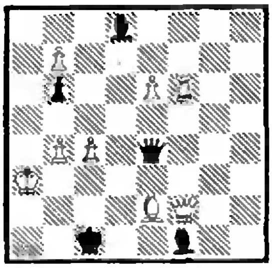


М. Класинч, 1980 г.

Обратный мат в 2 хода (максимуммер).

1. Фh1! Взятие пешкой длиннее, чем ее ход на одно поле, поэтому черные вынуждены взять коня d1. При этом возможны четыре превращения и всякий раз белая ладья d2 заставляет превращенную фигуру дать мат. **1...cdФ (Л, С, К) 2. Лd7 (Лd3, Лc2, Лf2+)** и соответственно **2...Ф:d7 (Л:h1, Cg4, K:f2)×.**

В этой задаче есть и несколько интересных ложных следов. Любой другой вступительный ход белого ферзя опровергается превращением пешки в соответствующую фигуру. 1. Фd8 (d3, d7, :c5)? cdФ (Л, С, К)!



К. Альхейм, 1980 г.

Обратный мат в 3 хода (максимуммер).

Важно сделать правильный вступительный ход. У черных четыре «равнодлинных» ответа — 1...Фb1 (Ф:b7, Фh7, Фh1). Последует соответственно 2. Фe3+ (Kpa2, Фe1+, Лf3) Kpc2 (Фh1, Kpc2, Фh8) 3. Фb3+ (Kpa1, b8Л, Лb3) Ф:b3 (Фa8, Фa7, Фa1)×.

1. Cf3! Теперь в случае 1...Фb1 и Фh7 возникают знакомые варианты, на 1...Ф:b7 следует 2. Kpa2 Фh7 3. Kpa1 Фb1×. Ход 1...Фh1 исчез, но зато появился 1...C:c4, и тогда 2. Фe1+ Ф:e1 3. b5 Фa5×.

Е. Я. Гик

45 коп.

Индекс 70465

Есть очень много головоломок, в которых требуется сцепить несколько брусков с вырезами в одну жесткую фигуру, часто напоминающую трехмерный крест. Такие головоломки называются буррами. Об одной из них рассказывалось в «Кванте» № 6 за 1981 г.— ее нередко можно встретить в продаже в форме звездчатого многогранника. Другой бурр, наверняка знакомый многим любителям головоломок,— «крест адмирала Макарова». Предлагаем вам несложный, но забавный «плоский бурр»: вырежьте нарисованные здесь бруски, надрежьте их по черным линиям и попробуйте сплести из них плоское изображение трехмерного креста, показанное справа внизу.

Д. К.